

orijentiranom smjeru  $X_k$ ), deformacijska je energija funkcija samo prekobrojnih sila. Sustav linearnih algebarskih jednadžbi za određivanje prekobrojnih sila slijedi iz uvjeta

$$\frac{\partial U(X)}{\partial X_k} = c_k \quad (k = 1, 2, \dots, n), \quad (206)$$

odnosno u matricnom obliku

$$\frac{dU(X)}{d\{X\}} = \{c\}. \quad (207)$$

**Proračun kinematički neodređenih sustava primjenom prvog Castiglianova teorema.** Ako napadne sile  $P$  djeluju samo na mjestu  $i$  u smjeru prekobrojnih pomaka  $Y$ , deformacijska je energija sustava funkcija samo tih pomaka,  $U = U(Y)$ . Sustav linearnih algebarskih jednadžbi za određivanje prekobrojnih pomaka slijedi iz uvjeta

$$\frac{\partial U(Y)}{\partial Y_j} = P_j \quad (j = 1, 2, \dots, m), \quad (208)$$

odnosno u matricnom obliku

$$\frac{dU(Y)}{d\{Y\}} = \{P\}. \quad (209)$$

*Primjer.* Za okvir na sl. 118a označeni su na sl. 118b prekobrojni pomaci  $Y_1$ ,  $Y_2$  i  $Y_3$ ; uvjeti za određivanje sustava jednadžbi jesu:

$$\frac{\partial U(Y)}{\partial Y_1} = 0, \quad \frac{\partial U(Y)}{\partial Y_2} = 0, \quad \frac{\partial U(Y)}{\partial Y_3} = P. \quad (210)$$

Deformacijska energija sustava sastoji se od doprinosa obaju stupova i prečke, pa iznosi

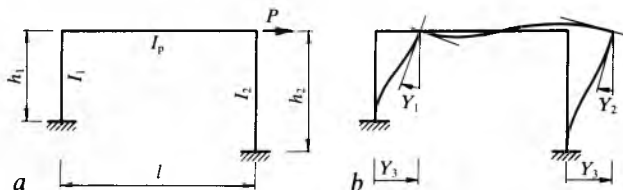
$$\begin{aligned} U &= U_1 + U_2 + U_p = \\ &= 2 \left[ (\alpha_1 + \alpha_p) Y_1^2 + (\alpha_p + \alpha_2) Y_2^2 + \alpha_p Y_1 Y_2 + \right. \\ &\left. + 3 \left[ -\frac{\alpha_1}{h_1} Y_1 Y_3 - \frac{\alpha_2}{h_2} Y_2 Y_3 + \left( \frac{\alpha_1}{h_1^2} + \frac{\alpha_2}{h_2^2} \right) Y_3^2 \right] \right]. \end{aligned} \quad (211)$$

Uvjeti (210) daju sustav jednadžbi za pronalaženje prekobrojnih pomaka  $Y_1$ ,  $Y_2$  i  $Y_3$ :

	$Y_1$	$Y_2$	$Y_3$	$P$
	$4(\alpha_1 + \alpha_p)$ kNm	$2\alpha_p$ kNm	$-6 \frac{\alpha_1}{h_1}$ kN	0 kNm
		$4(\alpha_p + \alpha_2)$ kNm	$-6 \frac{\alpha_2}{h_2}$ kN	0 kNm
simetr.			$12 \left( \frac{\alpha_1}{h_1^2} + \frac{\alpha_2}{h_2^2} \right)$ kN/m	1 kN

(212)

Dvostruka vertikalna linija označuje znak jednakosti jednadžbi. Sustav koeficijentata s lijeve strane te linije matrica je krutosti sustava.



Sl. 118. Portalni okvir sa stupovima različitih visina

LIT.: K. Beyer, Statika armiranih betonskih konstrukcija. Građevinska knjiga, Beograd 1963. – K. Sattler, Lehrbuch der Statik. Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York 1969. – J. Meek, Matrix Structural Analysis. McGraw-Hill, New York 1971. – A. Смирнов, Строительная механика. Стройиздат, Москва 1981.

R. Rosman

**STATISTIČKA KONTROLA KVALITETE**, skup metoda i postupaka za prikupljanje, obradu, analizu, tumačenje i prikaz podataka radi osiguranja kvalitete industrijskih proizvoda i proizvodnog procesa. Pravilna primjena statističke kontrole kvalitete omogućuje smanjenje dorade i

škarta (odmetka, neispravnih proizvoda) u proizvodnom procesu, smanjenje troškova proizvodnje, a posebno smanjenje troškova kontrole kvalitete.

Da bi se provodila statistička kontrola kvalitete, potrebno je utvrditi standarde kvalitete za proizvod i proizvodni proces. Svrha je te kontrole da se utvrdi sposobnost procesa za proizvodnju proizvoda koji zadovoljavaju te standarde, da se prati proizvodni proces kako bi se otkrile promjene zbog kojih proces izmiče kontroli i kako bi se poduzele mjere za korekciju proizvodnog procesa i njegovo održavanje pod kontrolom. To se postiže statističkom analizom kvalitete proizvoda.

### METODE STATISTIČKE KONTROLE KVALITETE

Statistička se kontrola kvalitete obavlja uzimanjem uzoraka iz skupa jedinica (strojni dijelovi, sastavni dijelovi proizvoda ili gotov proizvod) koje treba kontrolirati. Uzorci se kontroliraju prema *atributivnim* ili *mjerljivim karakteristikama*, a na temelju rezultata kontrole zaključuje se o kvaliteti skupa. Postoje dva bitno različita načina primjene statističke kontrole kvalitete: kontrola nakon dovršene proizvodnje i u toku proizvodnje.

*Kontrola nakon dovršene proizvodnje*; svaka je jedinica skupa dostupna za kontrolu. Uzima se uzorak od  $n$  jedinica (ili više uzoraka od  $n_1, n_2, \dots$  jedinica) iz osnovnog skupa od  $N$  jedinica koji se temeljito kontrolira. Ako je broj škartnih jedinica manji od dopuštenog, čitav se skup ocjenjuje kao dobar i prihvaća se, a ako je broj škartnih jedinica veći od dopuštenog, ocjenjuje se kao loš i odbija se. Rezultat ocjene bitno ovisi o razini kvalitete koja vrijedi za kontroliranu proizvodnju. Uzimanje uzoraka i dalji postupak s njima propisan je *planom prijema*. Plan prijema posebno je razrađen za atributivne i za mjerljive karakteristike.

*Kontrola dok je proizvodnja u toku*. Jedan je dio jedinica koje treba kontrolirati dovršen, a drugi dio još nije proizveden, pa ga nije moguće ni kontrolirati. Tada se iz proizvodnje koja je u toku uzimaju uzorci s malim brojem jedinica koji se potpuno kontroliraju, tj. kontrolira se svaka jedinica u uzorku. Obrada rezultata kontrole pokazuje tendenciju odstupanja kontrolirane karakteristike dovršenih jedinica. Uzimanje uzoraka i dalji postupak s njima propisan je *kontrolnim kartama*. Kontrolne se karte primjenjuju u toku proizvodnje i djeluju preventivno na osiguranje kvalitete proizvoda.

*Uzimanje uzoraka* iz osnovnog skupa jedinica najdelikatnija je faza u primjeni statističke kontrole kvalitete jer je potrebno osigurati reprezentativnost osnovnog skupa jedinica. Reprezentativnost uzorka ovisi o omjeru broja jedinica  $n$  u uzorku i ukupnog broja jedinica  $N$  u osnovnom skupu, te o slučajnom izboru jedinica iz osnovnog skupa. Teško je, međutim, osigurati slučajnost izbora uzoraka, što utječe na pouzdanost primjene statističke kontrole kvalitete. Planovi prijema i kontrolne karte posebno su razrađeni za mjerljive i atributivne karakteristike.

Atributivne se karakteristike ocjenjuju. Promjer se strojnog dijela, npr., kontrolira stalnim kalibrom, pa se smatra da je kontrolirani strojni dio loš ako ne prolazi kroz kalibar. Serija se strojnih dijelova ocjenjuje prema utvrđenom postotku škarta u njoj. Mjerljive su karakteristike, npr., dimenzije ili masa strojnog dijela, one koje se mogu dovoljno precizno mjeriti.

Metode i postupci statističke kontrole kvalitete primjenjuju se u svim proizvodnim područjima. Najviše se, međutim, statistička kontrola kvalitete primjenjuje u industrijskoj komadnoj proizvodnji, kojoj je osnovna karakteristika nekontinuiranost proizvodnog i tehnološkog procesa.

Nekontinuiranost proizvodnog i tehnološkog procesa očituje se u odvojenoj proizvodnji sastavnih dijelova (I. faza) od sastavljanja proizvoda (II. faza) koje se može obavljati u neposrednoj blizini ili bilo gdje drugdje. Nekontinuiranost je karakteristika i proizvodnje serija sastavnih dijelova nekog proizvoda u različitim vremenskim razdobljima i na različitim

mjestima. Često sastavne dijelove proizvode različiti proizvođači, kooperanti, koji mogu biti i u različitim zemljama.

Osnovni su radni postupci: radna operacija, transport, kontrola, zastoji i uskladištenje.

U proizvodnom industrijskom procesu događaju se nepredviđene promjene. Statistička kontrola kvalitete prati osnovne elemente proizvodnog procesa: materijal, sustav stroj/alat-radnik. Svaki je od tih elemenata podložan nepredviđenim promjenama u toku proizvodnje. Pravodobnim otkrivanjem tendencija tih promjena mogu se poduzeti potrebne korekcije. U proizvodnom procesu komadne proizvodnje na promjene utječu ponašanje i sposobnost radnika, istrošenost alata i radnog stroja, promjena svojstava sirovina, neprimjereni transport i skladištenje u radnim međufazama, utjecaj radnog okoliša, pomanjkanje kvalificiranih radnika i sl.

Sve to uzrokuje, u pravilu, mnoga odstupanja u proizvodnom procesu. Dok su ta odstupanja unutar određenih granica (unutar granica dopuštenih odstupanja), proizvodni je proces pod kontrolom. Ako su promjene kontrolirane karakteristike proizvoda izvan dopuštenih granica, proizvodni proces nije pod kontrolom i potrebno mu je posvetiti posebnu pažnju. Statistička kontrola kvalitete razlikuje mala i zanemarljiva odstupanja predviđena standardima od većih koja se povremeno pojavljuju. Statistička kontrola kvalitete mora pravodobno otkriti spomenuta veća odstupanja, da bi se stručnom analizom utvrdili uzroci promjene i poduzele korekcije radi vraćanja procesa pod kontrolu.

Statistička analiza, međutim, može samo upozoravati na nastalu promjenu, upozoriti da se promjena dogodila i da treba utvrditi moguće uzroke. Statistička kontrola kvalitete ne daje mjeru odstupanja, niti pokazuje što treba poduzeti da bi se to odstupanje uklonilo. Iskustvo i stručna analiza utvrdit će uzroke odstupanja i odrediti što treba poduzeti radi vraćanja procesa pod kontrolu.

Statističkom se kontrolom kvalitete racionalizira kontrola kvalitete, pogotovu kad tehnička sredstva kontrole imaju bitno manji kapacitet od proizvodnih sredstava.

**Slučajni i sustavni uzroci odstupanja.** Slučajna odstupanja ili promjene u proizvodnom procesu nastaju zbog mnogobrojnih pojedinačnih uzroka među kojima nema dominantnoga. Svaki od njih uzrokuje mala, obično zanemarljiva odstupanja, ali više takvih uzroka može rezultirati znatnim ukupnim odstupanjima.

Slučajna su odstupanja svojstva proizvodnog procesa i ne mogu se potpuno spriječiti. To znači da kontrolirana karakteristika kvalitete pokazuje rasipanje koje se pokorava *normalnoj razdiobi*, a u prirodnim je granicama procesa kad je unutar granica  $\pm 3\sigma$  gdje je  $\sigma$  standardno odstupanje (v. *Statistika*). Tada se smatra da je proizvodni proces stabilan, odnosno da se njime vlada. Takav se proces može vrlo efikasno pratiti kontrolnim kartama (v. *Organizacija proizvodnje*, TE 9, str. 701).

Sustavna odstupanja nastaju zbog jednoga (ili samo nekoliko) uzroka koji je dominantan (ili koji su dominantni), u usporedbi sa svima ostalim. Takvim sustavnim uzrokom mogu nastati velika odstupanja. To su, npr., pogreške radnika u namještanju stroja, upotreba neprikladnog materijala za izradak, prekomjerno istrošen alat i sl. Kad se pojavljuju sustavna odstupanja, znači da proces nije dovoljno stabilan pa treba identificirati i ukloniti uzroke tih odstupanja.

**Razdioba frekvencija.** Prvi je korak u primjeni statističke kontrole kvalitete određivanje svojstava proizvodnog procesa pomoću razdiobe frekvencija kontrolirane karakteristike, koja se grafički prikazuje histogramima, poligonima i stupcima. Često se kontrola kvalitete može ostvariti pomoću histograma, jer njegov oblik prikazuje svojstvo procesa, koje se ne može zapaziti iz skupa neobrađenih podataka. Prema podacima kontrolirane karakteristike dobiva se empirijska razdioba koja se zatim prilagođuje teorijskoj.

**Teorijska razdioba slučajnih varijabla.** Varijabla  $x$  slučajna je varijabla ako može poprimiti neku vrijednost s određenom vjerojatnošću  $p(x)$ . Funkcija vjerojatnosti  $f(x)$  prikazuje vezu

između vrijednosti slučajne varijable  $x$  i vjerojatnosti njene pojave  $p(x)$ .

Skup parova  $\{x_i, p(x_i)\}$  razdioba je slučajne varijable  $x$ .

Funkcija razdiobe  $F(x_k) = \sum_0^k p(x_i)$  suma je vjerojatnosti pojave varijable  $x$  do vrijednosti  $x_k$ . To su kumulativne vjerojatnosti pa se može napisati da je  $F(x_k) = P\{x \leq x_k\}$ . Slučajna varijabla  $x$  može biti kontinuirana ili diskontinuirana. *Kontinuirana slučajna varijabla* može poprimiti bilo koju vrijednost u promatranom intervalu (npr. vrijednost promjera brušenog valjka), a *diskontinuirana slučajna varijabla* može poprimiti samo neke diskretne vrijednosti u promatranom intervalu (npr. broj loših komada u uzorku). U tabl. 1 nalaze se karakteristike funkcija vjerojatnosti.

Tablica 1  
KARAKTERISTIKE FUNKCIJA VJEROJATNOSTI

Kontinuirana varijabla	Diskontinuirana varijabla	Karakteristike
$f(x) \geq 0$ za svako $x$	$p(x) \geq 0$ za $x = 0, 1, 2, 3, \dots, n$	Funkcija vjerojatnosti poprima samo pozitivne vrijednosti
$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$	$\sum_{i=0}^n p(x_i) = 1$	Suma svih vjerojatnosti siguran je događaj, dakle $P = 1$
$F(x) = \int_{-\infty}^x f(x) dx = P\{-\infty < x_1 < x\}$	$F(x_k) = \sum_{i=0}^k p(x_i) = P\{x \leq x_k\}$	Funkcija distribucije slučajnih varijabla suma je svih vjerojatnosti do $x$ (kumulativna vrijednost)

Valja naglasiti da se u praktičnoj primjeni statističke kontrole kvalitete ne susreće s teorijskim razdiobama jer se raspolaze samo *dijelom populacije* koja se kontrolira. Teorijska razdioba mogla bi se izvesti samo nakon kontrole cjelokupne proizvodnje kroz cijeli vijek trajanja proizvodnog procesa. No tada bi se izgubilo preventivno djelovanje, što je jedna od prednosti statističke kontrole kvalitete.

Ostale su statističke veličine

$$\bar{x} = \frac{\sum x}{n} \text{ (srednja vrijednost)} \quad (1)$$

$$R = x_{\max} - x_{\min} \text{ (raspon)} \quad (2)$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum (x - \mu)^2}{n}} \text{ (standardno odstupanje)} \quad (3)$$

$$s = \sqrt{\frac{\sum (x - \bar{x})^2}{n - 1}} \text{ (procijenjeno standardno odstupanje)} \quad (4)$$

$$s^2 = \frac{\sum (x - \bar{x})^2}{n - 1} \text{ (varijanca)} \quad (5)$$

gdje je  $n$  broj jedinica u uzorku, a  $\mu$  očekivanje.

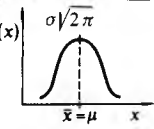
U tabl. 2 navedene su najčešće primjenjivane funkcije vjerojatnosti.

**Plan prijema** skup je propisa i tablica kojima se određuje broj jedinica uzorka  $n$  koji se uzima iz osnovnog skupa od  $N$  jedinica, i podvrgava potpunoj, tj. stopostotnoj kontroli, da bi se na temelju kvalitete uzorka ocijenila prihvatljivost osnovnog skupa.

Osnovna je ideja planova prijema da se, radi pojeftinjenja kontrole, odustane od kontrole svih proizvedenih jedinica i da se kontrolira samo mali dio slučajno izabranih jedinica. Plan se prijema primjenjuje u svim fazama industrijske proizvodnje (npr. ulazna kontrola sirovina, kontrola tehnoloških operacija, završna kontrola i dr.)

U ulaznoj kontroli, svaka će stopostotno kontrolirana isporuka biti prihvaćena ako njezina razina kvalitete  $p$  bude niža od dopuštene  $p_d$  ( $p < p_d$ ), a bit će odbijena ako ta razina bude viša od dopuštene ( $p > p_d$ ); sl. 1a. Dakle, *prihvaćanje*

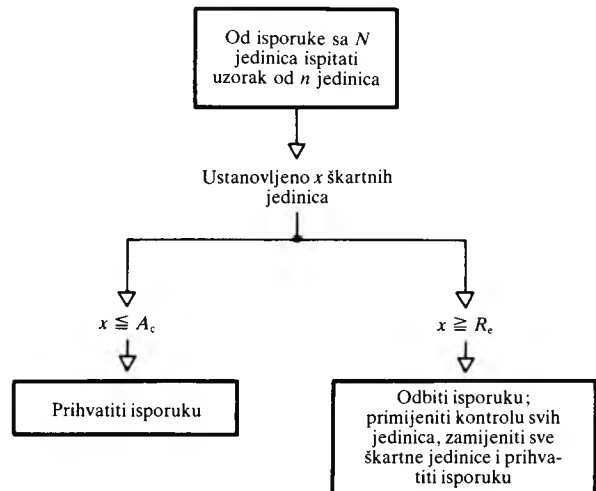
Tablica 2  
NAJČEŠĆE PRIMJENJIVANE FUNKCIJE VJEROJATNOSTI

Funkcija vjerojatnosti	Oznake	Primjena
Normalna razdioba $f(x) = \frac{\exp \left[ -\frac{1}{2} \left( \frac{x-\mu}{\delta} \right)^2 \right]}{\sigma\sqrt{2\pi}}$ 	$\mu \approx \bar{x}$ očekivanje $\sigma \approx s$ standardno odstupanje	Primjenjuje se za prirodne procese kad djeluje veći broj utjecajnih faktora među kojima nema dominantnoga. Dimenzije i mehanička svojstva strojnih dijelova kao posljedica proizvodnog procesa odgovaraju normalnoj razdiobi
Hipergeometrijska razdioba $p(x) = \frac{\binom{M}{x} \binom{N-M}{n-x}}{\binom{N}{n}}$	$N$ broj jedinica u osnovnom skupu $M$ broj dobrih jedinica u osnovnom skupu $n$ broj jedinica u uzorku	Primjenjuje se u kontroli kvalitete pomoću uzoraka kad je skup malen, pa se uzimanjem uzorka mijenjaju omjeri dobrih i škartnih jedinica u osnovnom skupu
Binomna razdioba $p(x) = \binom{n}{x} p^x q^{n-x}$	$n$ broj jedinica u uzorku $p = \frac{M}{N}$ udio dobrih jedinica u osnovnom skupu $q = \frac{N-M}{N}$ udio škartnih jedinica u osnovnom skupu	Primjenjuje se kad je broj jedinica osnovnog skupa prema uzorku neiscrpin ( $N \rightarrow \infty$ )
Poissonova razdioba $p(x) = \frac{m^x}{x!} \exp(-m)$	$m = np$	Primjenjuje se u kontroli pomoću uzoraka uz malo $p$ i veliko $n$ , a često se tom razdiobom aproksimira binomna koja se teže određuje

tvrtkama ili institucijama koje ih primjenjuju. Tako, npr., postoji plan prijema MIL-STD-105D, Dodge-Romig, Philips, UNI i dr, koji se primjenjuju i u nas. Od 1974. u nas se primjenjuju *Planovi i postupci uzimanja uzoraka za kontrolu prema atributima* (JUS N.N0.029).

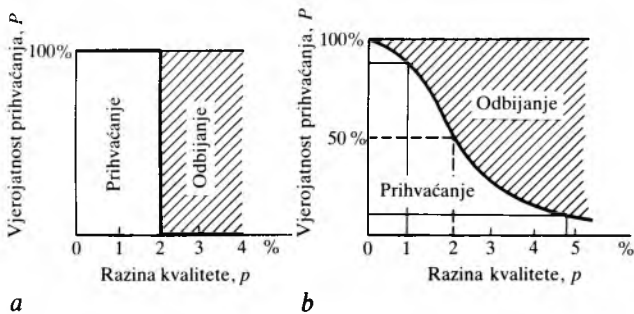
Planovi prijema predviđaju jednostruki, dvostruki i višestruki sustav uzimanja uzoraka iz osnovnog skupa jedinica. Bez obzira na vrste primijenjenog sustava za uzimanje uzoraka, kontrolom se isporuke mora pouzdano ocijeniti da li je razina kvalitete isporuke viša ili niža od prihvatljive razine kvalitete  $L_{AQ}$  (ili AQL, prema engl. Acceptable Quality Level), kojom se definira maksimalno dopušteni škart. Prihvatljivu razinu kvalitete  $L_{AQ}$  zajednički definiraju kupac i dobavljač u kupoprodajnom ugovoru.

Jednostruki sustav uzimanja uzoraka prikazan je na sl. 2.  $A_c$  je maksimalni broj škartnih jedinica koji se tolerira u uzorku, pa se isporuka prihvaća.  $R_e$  je broj škartnih jedinica koji nije dopušten u uzorku pa se isporuka odbija. Odbijanje



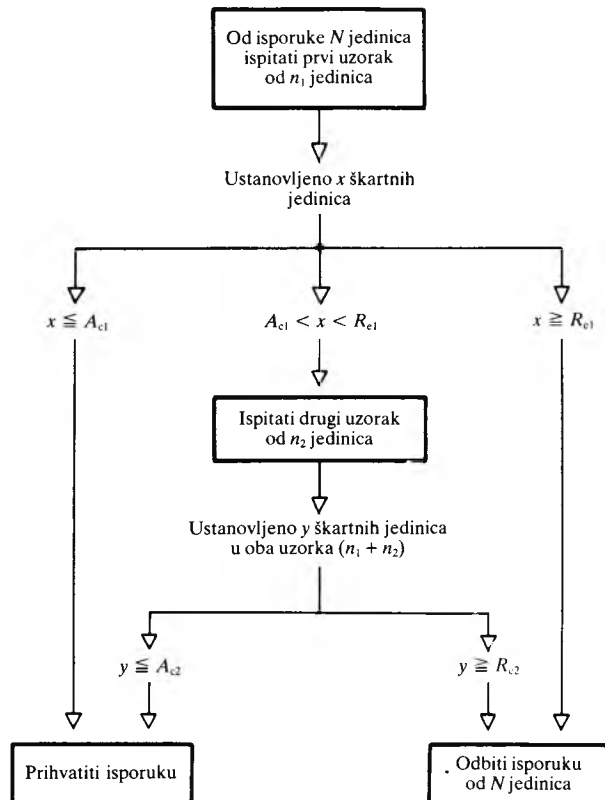
Sl. 2. Prikaz kontrole kvalitete jednostrukim sustavom uzimanja uzoraka

ili odbijanje isporuke na temelju stvarne razine kvalitete siguran je događaj (prihvaćanje:  $P = 1$  za  $p \leq p_d$ , odbijanje:  $P = 0$  za  $p > p_d$ ). U kontroli primjenom planova prijema potpuna sigurnost u prihvaćanju dobrih isporuka, odnosno u odbijanju loših isporuka ne postoji, već i dobavljač i kupac preuzimaju određeni rizik. Rizik je dobavljača da mu bude vraćena dobra isporuka, a rizik kupca da prihvati lošu isporuku (sl. 1b). *Razina kvalitete* isporuke definira se kao udio škarta u isporuci izražen u postocima. Ako se u isporuci od 200 jedinica, mora škartirati 6 jedinica, razina je kvalitete  $p = 0,03 = 3\%$ . Prema takvoj definiciji, razina je kvalitete to viša, što je isporuka slabije kvalitete. Najbolja je ona isporuka kojoj je razina kvalitete jednaka nuli, tj. kad je  $p = 0\%$ , jer bi takva isporuka sadržavala samo ispravne jedinice.



Sl. 1. Vjerojatnost prihvaćanja isporuke. a potpuna kontrola, b statistička kontrola

**Plan prijema za atributivne karakteristike.** Postoje različite vrste takvih planova prijema, a nazivaju se najčešće prema

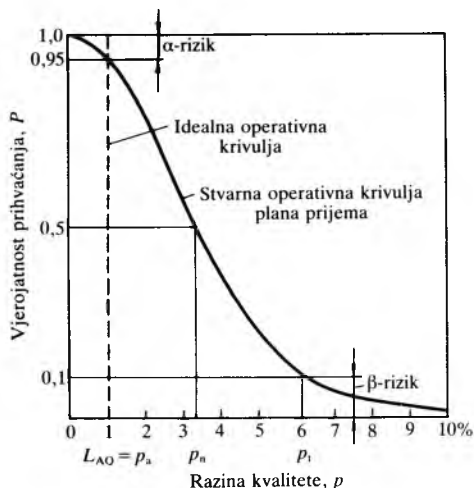


Sl. 3. Prikaz kontrole kvalitete dvostrukim sustavom uzimanja uzoraka

isporuke znači da sve jedinice isporuke treba kontrolirati, a sve škartne jedinice zamijeniti ispravnima.

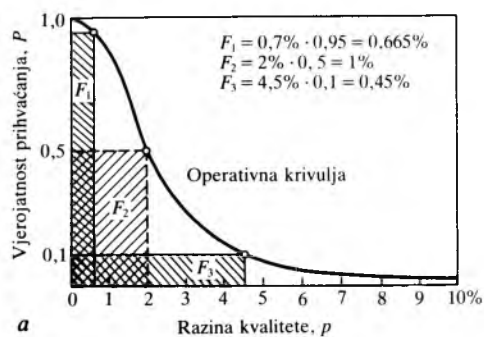
Dvostruki sustav uzimanja uzoraka prikazan je na sl. 3, gdje su  $n_1$  i  $n_2$  brojevi jedinica u prvom i drugom uzorku,  $A_{c1}$  i  $A_{c2}$  brojevi prihvatanja, a  $R_{e1}$  i  $R_{e2}$  brojevi odbijanja.

Operativna krivulja plana prijema pokazuje vjerojatnost da isporuka određene razine kvalitete  $p < L_{AO} = p_a$  ili  $p > L_{AO} = p_a$  bude prihvaćena ili odbijena. Tada ne postoji potpuna sigurnost u točnost ocjene, premda je vrlo vjerojatno ( $P > 0,9$ ) da će dobra isporuka ( $p \approx 0$ ) biti prihvaćena, a loša isporuka ( $p \approx L_{AO} = p_a$ ) biti odbijena. Na sl. 4 prikazana je operativna krivulja jednostrukog plana prijema prema JUS N.N0.029.

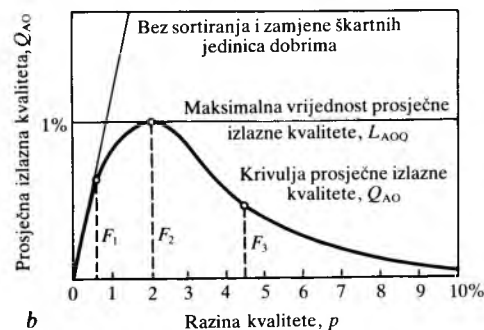


Sl. 4. Operativna krivulja plana prijema.  $L_{AO} = p_a$  prihvatljiva razina kvalitete,  $p_i$  tolerirana razina kvalitete,  $p_n$  neutralna razina kvalitete

Budući da pri primjeni statističke kontrole postoji određena vjerojatnost da sasvim dobre isporuke ( $p \ll L_{AO} = p_a$ ) budu prihvaćene, a također da budu prihvaćene isporuke prosječne kvalitete ( $p \approx L_{AO} = p_a$ ) kao i vrlo loše isporuke ( $p \gg L_{AO}$ ), potrebno je ispitati koja je prosječna razina izlazne kvalitete koja se postiže nakon prihvaćanja niza



a



b

Sl. 5. Prikaz prosječne izlazne kvalitete (b) za operativnu krivulju (a). Površine  $F$  ispod operativne krivulje prikazane su ordinatama krivulje prosječne izlazne kvalitete

isporuka. Potrebno je, dakle, ispitati da li se škartne jedinice primjenom statističke kontrole gomilaju u skladištu nakon prihvaćanja niza isporuka, npr. u toku jedne godine. Zbog toga je uveden pojam *prosječne izlazne kvalitete*  $Q_{AO}$  (ili  $AOQ$ , prema engl. Average Outgoing Quality). Prosječna izlazna kvaliteta (sl. 5) pokazuje udio škartna koji će se ostvariti nakon kontinuiranog prihvaćanja velikog broja isporuka. Među tim isporukama dobre su bile bez daljega primljene (sa stvarnim  $p$ ), a one loše bile su primljene tek nakon što su podvrgnute potpunoj kontroli i nakon što su pronađene škartne jedinice zamijenjene ispravnima. Funkcija  $Q_{AO} = f(p)$  ima karakterističan oblik s maksimumom  $L_{AOQ}$  (ili  $AOQL$ , prema engl. Average Outgoing Quality Limit). Postojanje te maksimalne vrijednosti prednost je statističke kontrole prema potpunoj kontroli kvalitete.

**Planovi prijema za mjerljive karakteristike.** Kad se prihvaćanje vrši za više mjerljivih karakteristika, svaka se karakteristika posebno obrađuje. Ako isporuke dolaze od različitih dobavljača, svaki se dobavljač posebno obrađuje. Plan prijema za mjerljive karakteristike primjenjuje se kad je proizvodnja stabilna, a kontrolirana karakteristika distribuirana prema normalnoj razdiobi ili razdiobi sličnoj normalnoj. Tada je potrebno ugovorom definirati gornju ili donju ili obje granice dopuštenih odstupanja.

Prihvatljivost isporuke ocjenjuje se primjenom  $\sigma$ -metode,  $s$ -metode ili  $R$ -metode.

$\sigma$ -metoda za ocjenjivanje prihvatljivosti isporuke osniva se na standardnom odstupanju vrijednosti kontrolirane karakteristike na temelju mjerenja svih jedinica u uzorku, uz prethodno poznavanje standardnog odstupanja  $\sigma$ .

$s$ -metoda za ocjenjivanje prihvatljivosti isporuke osniva se na procijenjenom standardnom odstupanju kontrolirane karakteristike na temelju mjerenja svih jedinica u uzorku.

Tablica 3  
USPOREDBA PLANOVA PRIJEMA ZA ATRIBUTIVNE I MJERLJIVE KARAKTERISTIKE

Obilježja	Planovi prijema za	
	atributivne karakteristike	mjerljive karakteristike
Tehnička kontrola	Svaki se proizvod klasificira kao dobar ili loš. Može se primijeniti kontrola kalibrima	Svaka se karakteristika mjeri. Visoka cijena kontrole
Razdioba pojedinačnih mjerenja	Ne mora biti poznata	Mora biti poznata; obično normalna razdioba
Vrsta pogreške	Bilo koji broj škartnih jedinica može se procijeniti jednim planom	Potrebna poseban plan za svaku vrstu pogreške
Broj jedinica u uzorku	Ovisi o zahtijevanoj sigurnosti	Za jednaku sigurnost kao za atributivne karakteristike potreban je manji uzorak
Informacije o praćenju	Udio škartna	Udio škartna; informacija o prosječnim svojstvima procesa i o promjenama koje su indicacija za korekcije
Strogost	Jednako procjenjuje sve škartne jedinice	Procjenjuje svaku kontroliranu jedinicu s obzirom na specifikaciju
Informiranje dobavljača	Škartne jedinice služe kao dokaz (uvid)	Skupina može biti odbijena i kad u uzorku nema škartna
Mjerne pogreške	Mjerenja se ne registri- raju	Mjerenja se mogu regi- strirati i naknadno pro- vjeriti
Strogo kontrolirane skupine	Bez utjecaja na izvođenje plana	Strogo kontrolirane sku- pine mogu greškom biti odbačene iako u njima nema škartna

R-metoda za ocjenjivanje prihvatljivosti isporuke osniva se na prosječnom rasponu kontroliranih karakteristika uzorka.

Tabl. 3 sadrži usporedbu između planova prijema za atributivne i mjerljive karakteristike.

**Kontrolne karte.** Kontrolnom se kartom prati jedna od karakteristika (mjerljiva ili atributivna) proizvoda uzimanjem više uzoraka od malo jedinica u toku proizvodnje. Jedinice iz uzoraka potpuno se kontroliraju, tj. svaka jedinica, da bi se utvrdilo je li karakteristike odgovaraju postavljenim zahtjevima. Kad se prati više uzoraka (~25), može se predvidjeti da li će kontrolirana karakteristika ostati u zadanim granicama, odnosno koja je vjerojatnost da ta karakteristika ne ostane u tim granicama. Kontrolne karte primjenjuju se u serijskoj, visokoserijskoj i masovnoj proizvodnji.

Kako postoji statistička veza između relativno velikog uzorka od  $n$  jedinica i osnovnog skupa od  $N$  jedinica, tako postoji i statistička veza između mnogo relativno malih uzoraka od  $n_1, n_2, n_3, \dots, n_k$  jedinica i osnovnog skupa, što je temelj primjene kontrolnih karata za mjerljive karakteristike. Nakon uzimanja niza uzoraka od  $n_1, n_2, n_3, \dots, n_k$  jedinica, mogu se za svaki uzorak odrediti srednje vrijednosti  $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3, \dots, \bar{x}_k$ . Tako izračunane srednje vrijednosti pokoravaju se normalnoj razdiobi iako osnovni skup nema normalnu razdiobu. Stoga se aritmetičke sredine uzoraka gomilaju oko srednje vrijednosti osnovnog skupa. To znači da je

$$x_0 \approx \bar{x} = \frac{\bar{x}_1 + \bar{x}_2 + \bar{x}_3 + \dots + \bar{x}_k}{k}, \quad (6)$$

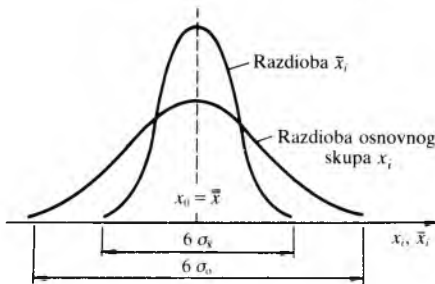
gdje je  $x_0$  srednja vrijednost osnovnog skupa,  $\bar{x}$  prosjek aritmetičkih sredina  $\bar{x}_n$  izmjerenih vrijednosti, a  $k$  broj uzoraka.

Postoje veze između karakterističnih veličina i standardnog odstupanja  $\sigma_0$  osnovnog skupa.

Tako za standardno odstupanje  $\sigma_{\bar{x}}$  srednje vrijednosti uzoraka vrijedi

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma_0}{\sqrt{n}}, \quad (7)$$

gdje je  $n$  broj jedinica u uzorcima. Sl. 6 prikazuje razdiobu osnovnog skupa  $x_i$  i srednjih vrijednosti  $\bar{x}_i$ .



Sl. 6. Razdioba osnovnog skupa  $x_i$  i razdioba srednjih vrijednosti uzoraka  $\bar{x}_i$ .

Svaki uzorak ima raspon definiran izrazom  $R_i = x_{i\max} - x_{i\min}$ . Srednja je vrijednost raspona

$$\bar{R} = \frac{R_1 + R_2 + \dots + R_k}{k} \quad (8)$$

Između srednje vrijednosti raspona i  $\sigma_0$  postoji veza određena izrazom

$$\bar{R} = d_2 \sigma_0. \quad (9)$$

Pomoću raspona uzoraka  $R_1, R_2, \dots, R_k$  može se odrediti standardno odstupanje raspona  $\sigma_R$ , pa je veza sa  $\sigma_0$  određena izrazom

$$\sigma_R = b_2 \sigma_0. \quad (10)$$

Svaki uzorak ima svoje standardno odstupanje  $\sigma_i$ , pa je srednja vrijednost tih standardnih odstupanja  $\bar{\sigma}$  povezana sa  $\sigma_0$  izrazom

$$\bar{\sigma} = c_2 \sigma_0. \quad (11)$$

Standardno odstupanje  $\sigma_0$  standardnih odstupanja uzoraka povezano je sa  $\sigma_0$  izrazom

$$\sigma_{\sigma} = a_2 \sigma_0. \quad (12)$$

Između osnovnog skupa i niza relativno malih uzoraka postoji statistička veza pomoću empiričkih koeficijenata  $a_2, b_2, c_2$  i  $d_2$  koji su funkcije broja jedinica  $n$  u uzorcima (tabl. 4). Oni služe da se pronađu kontrolne granice, odnosno širine pojasa za mjerljive karakteristike.

Tablica 4  
VELIČINE KOJE POVEZUJU UZORAK I OSNOVNI SKUP

Uzorak	Osnovni skup	
	Standardno odstupanje $\sigma_0$	Srednja vrijednost $x_0$
$\bar{x}$	-	1
$\sigma_{\bar{x}}$	$\frac{1}{\sqrt{n}}$	-
$\bar{R}$	$d_2$	-
$\bar{\sigma}$	$c_2$	-
$\sigma_R$	$b_2$	-
$\sigma_{\sigma}$	$a_2$	-

**Kontrolne karte za mjerljive karakteristike.** U praksi se najčešće upotrebljavaju kontrolne karte  $\bar{x}-R$  i  $\bar{x}-\sigma$ .

Kontrolne karte  $\bar{x}-R$  služe za praćenje tih dviju statističkih veličina jedne karakteristike u nizu uzoraka s malo jedinica ( $n = 3, 5$  ili  $7$  jedinica, rijetko više od  $10$  jedinica). Takve se kontrolne karte najviše upotrebljavaju za kontrolu mehaničke strojne obrade. Primjeri takvih kontrolnih karata nalaze se u članku *Organizacija proizvodnje*, TE 9, str. 712...714.

Za primjenu kontrolnih karata mjerljivih karakteristika navodi se primjer praćenja nepoznatog procesa kartom  $\bar{x}-R$  (sl. 7). Izrazi za računanje kontrolnih granica i vrijednosti odgovarajućih koeficijenata navedeni su u tabl. 5.

*Primjer.* Praćenje procesa kartom  $\bar{x}-R$ .

U proizvodnju se uvodi novi proizvod, tzv. cilindrični graničnik s karakterističnom dimenzijom  $\varnothing = (1,22 \pm 0,08)$  mm. Graničnik se izrađuje na automatskoj tokarilici. Budući da ne postoje podaci iz protekle proizvodnje sličnih dijelova na toj tokarilici, izrada se graničnika prati kontrolnom kartom  $\bar{x}-R$  da se ustanove njegova centriranost i rasipanje. Slučajnim izborom uzimaju se u  $k = 20$  obilazaka kontrolora slučajni uzorci od  $n = 5$  komada koji se mjere mikrometrom.

Rezultati se mjerenja unose u kartu, ali samo kao razlika iznad 1 mm, tj. samo stotinke milimetra.

Računanje kontrolnih granica:

1. korak: Prosjek  $\bar{x}$  aritmetičkih sredina  $\bar{x}$  izmjerenih vrijednosti (centralna linija - CL za  $\bar{x}_i$ ):

$$\bar{x} = \frac{\sum \bar{x}_i}{k} = \frac{24,588}{20} = 1,2294 \approx 1,23 \text{ mm.}$$

2. korak: Prosjek raspona između maksimalnih i minimalnih vrijednosti (centralna linija - CL za  $R_i$ ):

$$\bar{R} = \frac{\sum R_i}{k} = \frac{1,27}{20} = 0,0635 \text{ mm.}$$

3. korak: Kontrolne granice za aritmetičku sredinu  $\bar{x}$ :

$$G_{\bar{x}}^{(d)} = \bar{x} \pm A_2 \bar{R}.$$

Za  $n = 5$  je  $A_2 = 0,577$ , pa slijedi  $G_{\bar{x}}^{(d)} = 1,267$  mm i  $G_{\bar{x}}^{(d)} = 1,193$  mm.

4. korak: Kontrolne granice za raspon  $R$ :

$$G_R^{(d)} = D_4 \bar{R}.$$

Za  $n = 5$  je  $D_4 = 2,11$ , pa slijedi  $G_R^{(d)} = 0,134$  mm.

$$G_R^{(d)} = D_3 \bar{R}.$$

Za  $n = 5$  je  $D_3 = 0$ , pa slijedi  $G_R^{(d)} = 0$ .

Budući da podatak iz šestog obilaska  $\bar{x}_6$  pada izvan  $G_{\bar{x}}^{(d)}$ , a želi se saznati prirodno ponašanje procesa (tj. kada na njega djeluju samo slučajni faktori), potrebno je ponovno računati kontrolne granice za  $\bar{x}$  bez podataka iz tog obilaska, tj. izvršiti korekciju.



Tablica 6  
KONTROLNE GRANICE ZA KONTROLNU KARTU  $\bar{x}-\sigma$

Računa se prije praćenja procesa					Računa se u toku praćenja procesa						
Kontrolne granice: $G_{\bar{x}}^{(g,d)} = x_0 \pm A \sigma_0$ $G_{\sigma}^{(g)} = B_2 \sigma_0$ $G_{\sigma}^{(d)} = B_1 \sigma_0$ $\bar{\sigma} = c_2 \sigma_0$					Kontrolne granice: $G_{\bar{x}}^{(g,d)} = x_0 \pm A' T$ $G_{\sigma}^{(g)} = B_2' T$ $G_{\sigma}^{(d)} = B_1' T$ $\bar{\sigma} = c_2' T$				Kontrolne granice: $G_{\bar{x}}^{(g,d)} = \bar{x} \pm A_1 \bar{\sigma}$ $G_{\sigma}^{(g)} = B_3 \bar{\sigma}$ $G_{\sigma}^{(d)} = B_4 \bar{\sigma}$		
n	Prošli podaci Poznato: $\sigma_0, x_0$				Tolerancije Poznato: $T, x_0$				Podaci iz procesa Poznato: $\bar{x}, \bar{\sigma}$		
	A	B <sub>1</sub>	B <sub>2</sub>	c <sub>2</sub>	A'	B <sub>1</sub> '	B <sub>2</sub> '	c <sub>2</sub> '	A <sub>1</sub>	B <sub>3</sub>	B <sub>4</sub>
10	0,949	0,262	1,584	0,9227	0,158	0,044	0,264	0,154	1,028	0,284	1,716
15	0,775	0,406	1,492	0,9400	0,129	0,068	0,249	0,158	0,816	0,428	1,572
20	0,671	0,491	1,433	0,9619	0,112	0,082	0,239	0,160	0,697	0,510	1,490
25	0,600	0,548	1,392	0,9696	0,100	0,091	0,232	0,162	0,619	0,565	1,435
30	0,548	0,588	1,362	0,9748	0,091	0,098	0,227	0,163	0,562	0,603	1,397
35	0,507	0,620	1,337	0,9784	0,085	0,103	0,223	0,163	0,518	0,633	1,367
40	0,474	0,646	1,317	0,9811	0,079	0,108	0,220	0,164	0,483	0,658	1,342
45	0,447	0,667	1,299	0,9832	0,075	0,111	0,217	0,164	0,455	0,678	1,322
50	0,424	0,685	1,285	0,9849	0,071	0,114	0,214	0,164	0,431	0,695	1,305
60	0,387	0,714	1,261	0,9874	0,065	0,119	0,210	0,165	0,392	0,723	1,277
70	0,359	0,736	1,243	0,9892	0,060	0,123	0,207	0,165	0,363	0,744	1,256
80	0,335	0,753	1,228	0,9906	0,056	0,126	0,205	0,165	0,338	0,761	1,239
90	0,316	0,768	1,215	0,9916	0,053	0,128	0,203	0,165	0,319	0,775	1,225
100	0,300	0,780	1,205	0,9925	0,050	0,130	0,201	0,165	0,302	0,786	1,214

Tablica 7  
USPOREDBA RAZLIČITIH KONTROLNIH KARATA

Kontrolne karte Obilježja	Kontrolne karte $\bar{x}-R$ Kontrolne karte $\bar{x}-\sigma$ Kontrolne karte $x$	Kontrolne karte $p$ Kontrolne karte $np$	Kontrolne karte $u$ Kontrolne karte $c$
Vrste podataka	Podaci o mjerljivoj veličini koja se kontrolira (dimenzije ili druga mjerljiva svojstva)	Podaci o atributivnim veličinama koje se kontroliraju (broj škartnih jedinica)	Podaci o atributivnim veličinama (broj pogrešaka po jedinici proizvoda ili uzorku)
Područje primjene	Kontrola pojedinačnih karakteristika	Kontrola ukupnog škarta u proizvodnom procesu	Kontrola ukupnog broja pogrešaka po jedinici proizvoda
Osobite prednosti	Omogućuje maksimalno iskorištenje prikupljenih podataka Detaljnije informira o prosjeku i trendu kontrolirane karakteristike u toku procesa	Potrebni se podaci dobivaju iz dokumentacije tehničke kontrole Lako razumljiva svemu osoblju Daje opću sliku o kvaliteti proizvoda	Slične prednosti kao karte $p$ , a osim toga prikazuje nastajanje pogrešaka u toku proizvodnje
Osobite manjkavosti	Nije razumljiva za neiskusne. Moguća je zabuna između kontrolnih granica i granica dopuštenih odstupanja Ne može se primijeniti u kontroli kalibrima	Ne daje informacije potrebne za kontrolu pojedinačnih karakteristika Ne prikazuje nastajanje pogrešaka u toku proizvodnje	Ne daje detaljne informacije potrebne za kontrolu pojedinačnih karakteristika

kidne čvrstoće) u nizu uzoraka koji imaju više od 30 jedinica. Najviše se upotrebljavaju za kontrolu materijala nakon toplinske obradbe, odnosno obradbe za koju se očekuje veće rasipanje kontrolirane karakteristike. Primjer takve kontrolne karte vidi se također u članku *Organizacija proizvodnje*, TE 9, str. 712 na sl. 16, a izrazi potrebni za računanje nalaze se u tabl. 6 ovoga članka.

**Kontrolne karte za atributivne karakteristike.** U praksi se upotrebljavaju kontrolne karte s oznakom  $p$ ,  $np$ ,  $u$  i  $c$  (v. *Organizacija proizvodnje*, TE 9, sl. 17...20).

**Kontrolne karte  $p$**  služe za praćenje udjela neispravnih jedinica  $x$  u uzorcima sa  $n$  jedinica, pa je  $p = x/n$ . Uzorci mogu imati različit broj jedinica.

**Kontrolne karte  $np$**  služe za praćenje broja pronađenih neispravnih jedinica u uzorcima. Uzorci moraju imati jednak broj jedinica.

**Kontrolne karte  $u$**  služe za praćenje prosječnog broja pogrešaka u jedinici proizvoda. Upotrebljavaju se za složenije

proizvode (npr. elektromotor), za pločaste, šipkaste i žičane proizvode, u tekstilnoj industriji i industriji papira. Uzorci mogu biti različite veličine.

**Kontrolne karte  $c$**  služe za praćenje pogrešaka u jednom uzorku. Uzorci moraju imati jednak broj jedinica.

Pomoću tih karata ocjenjuje se kvaliteta proizvoda. Te su karte vrlo jednostavne za primjenu i interpretaciju, ali podaci nisu dovoljno osjetljivi na promjene, pa uzorci moraju imati relativno mnogo jedinica. Za matematičku interpretaciju podataka na takvim kontrolnim kartama služe binomna i Poissonova razdioba. Tabl. 7 sadrži usporedbu kontrolnih karata.

**STATISTIČKA KONTROLA KVALITETE  
U SUVREMENIM UVJETIMA**

Neke od metoda statističke kontrole kvalitete primjenjivale su se u industriji već krajem prošlog stoljeća, ali je

sustavna upotreba tih metoda započela poslije prvoga svjetskog rata. Nagli razvoj tih metoda ostvaren je za vrijeme drugoga svjetskog rata, pogotovo u razdoblju poslije njega, kad je naglo porasla industrijska proizvodnja. U takvim uvjetima, naime, nije bilo moguće dovoljno temeljito kontrolirati kvalitetu proizvoda bilo zbog male pouzdanosti dotadašnjih metoda bilo zbog niske produktivnosti sredstava tehničke kontrole.

Početkom pedesetih godina uvodi se suvremena statistička kontrola kvalitete u industriji SAD i Japana, ali je ona teško prodirala u svakodnevnu praksu zbog teškoća u prikupljanju podataka i određivanju vrijednosti statističkih veličina. Tzv. brze metode statističke kontrole kvalitete ipak nisu bile dovoljno brze, a ni dovoljno pouzdane, da bi se mogle svakodnevno efikasno primjenjivati i donositi pravodobne odluke u proizvodnim uvjetima. Osnovna je teškoća u primjeni tih metoda bila u računanju bez pogodnih pomagala, pogotovo u malim radnim organizacijama i radionicama.

Te su teškoće uklonjene upotrebom elektroničkih računala na radnim strojevima i mjernim uređajima, što je omogućilo statističku kontrolu na svakom radnom mjestu i u svim fazama proizvodnog procesa, pa i upravljanje ukupnom proizvodnjom na temelju statističke kontrole kvalitete. Danas je vrlo raširena upotreba kompjutoriziranih ručnih uređaja (pomična mjerila, mikrometri, komparatori) koji s primjerenom programskom podrškom trenutno statistički obrađuju izmjerene veličine s pripadnim grafičkim prikazom. Osim toga, složeniji mjerni uređaji (trodimenzijski mjerni uređaji, uređaji za ispitivanje zupčanika, uređaji za ispitivanje hrapavosti ploha i sl.) omogućuju uz pomoć elektroničkog računala potpunu statističku analizu s grafičkim prikazom.

Bez obzira na to da li se mjerni podaci prikupljaju i onda obrađuju ili su mjerna ticala neposredno povezana s računalom, za statističku je analizu potrebna primjerena programska podrška.

Najzanimljivija je primjena statističke kontrole kvalitete za automatsku kontrolu alatnih strojeva i grupa strojeva u fleksibilnim proizvodnim linijama kad se automatski kontrolira karakteristična veličina (npr. promjer izratka) kompenzacijom alata, i to na temelju kontrole srednje vrijednosti  $\bar{x}$  karakteristične veličine, da bi se izbjegle intervencije zbog slučajnih promjena.

Postoji niz razvijenih programa za statističku kontrolu kvalitete. Tako je npr. program tvrtke Hawlett-Packard sposoban da odluči o prihvatanju ili odbacivanju izratka s obzirom na svaku mjerenu karakteristiku. Program, osim toga, prati učestalost kojom se svaka mjerena karakteristika pojavljuje u području ispod ili iznad granica dopuštenih odstupanja. Za svaku se karakteristiku tiskaju srednje vrijednosti  $\bar{x}$ , procijenjeno standardno odstupanje  $s$  i histogrami. Programski paketi obično mogu analizirati kontrolne karte.

Upotrebom računala brzo se proširila primjena statističke kontrole kvalitete u proizvodnim industrijskim procesima, jer je takva kontrola provjereno sredstvo za osiguranje kvalitete proizvoda i proizvodnih procesa. Iako kontrola kvalitete u suvremenoj proizvodnji teži potpunoj kontroli na proizvodnoj liniji (kontrola *on-line*), statistička će se kontrola kvalitete i dalje primjenjivati, pa se može očekivati i njezino unapređivanje.

LIT.: A. V. Feigenbaum, Total Quality Control, Engineering and Management. McGraw-Hill Book Company, New York 1961. – E. Schindowski, O. Schürz, Statistische Qualitätskontrolle. VEB Verlag Technik, Berlin 1965. – J. M. Juran, Quality Control-Handbook. McGraw-Hill Book Company, New York 1974. – J. M. Juran, F. M. Gryna, Planiranje i analiza kvaliteta od razvoja proizvoda do korišćenja. Privredni pregled, Beograd 1974. – JUS N.N0.029. Planovi i postupci uzimanja uzoraka za kontrolu prema atributima, 1974. – W. Masing, Handbuch der Qualitätssicherung. Carl Hauser Verlag, München 1980. – ISO 3951, Sampling Procedures and Charts for Inspection by Variables for Percent Defective, 1981. – H. J. Warnecke, W. Dutschke, Fertigungsmesstechnik. Springer-Verlag, Berlin 1984.

F. Dusman

**STATISTIKA**, znanstvena disciplina koja se bavi problemima u vezi s prikupljanjem, obradom i analizom podataka. Glavni su zadaci matematičke statistike izgradnja teorijskih temelja i praktičnih postupaka za stvaranje zaključaka o pojavi na koju se odnose izmjereni, odnosno opaženi podaci. Budući da se podaci redovito odnose na tzv. *slučajne pojave*, statističke se analize i zaključci zasnivaju na pojmovima i metodama *teorije vjerojatnosti* (v. *Vjerojatnost*).

Statističke se metode primjenjuju na različitim područjima ljudske djelatnosti, pa su razvijene i neke posebnosti. Zbog toga se govori o ekonomskoj, medicinskoj i vojnoj statistici, o statističkoj fizici, statističkoj kontroli kvalitete itd. U ovom se članku izlažu osnovni pojmovi i metode *matematičke statistike*, koja ima veliku primjenu u tehničkim znanostima.

Prikupljanje podataka o stanovništvu počelo je već u drevnim civilizacijama (Kina, Perzija, Grčka, Rim). U XVII. st. pojavljuju se na njemačkim sveučilištima predavanja iz «statistike» (lat. *status* stanje), koja se odnose na problematiku državnih popisa. Ozbiljnije doprinose razvitku ekonomske statistike dali su engleski znanstvenici XVII. stoljeća (J. Grant, E. Halley, W. Petty), koji su istraživali zakonitosti u masovnim društvenim pojavama. Prvi državni statistički ured osnovan je u Švedskoj (1756).

Počeci matematičke statistike mogu se naći već kod utemeljitelja teorije vjerojatnosti: J. Bernoullija (1654–1705), P. S. Laplacea (1749–1827), S. D. Poissona (1781–1840) i K. F. Gaussa (1777–1855). Najvažnije probleme matematičke statistike i glavne ideje za njihovo rješavanje postavili su vodeći statističari tzv. anglosaksonske statističke škole: F. Galton (1822–1911), K. Pearson (1857–1936), R. A. Fisher (1890–1962) i J. Neyman (1894–1981).

Danas u svijetu postoji mnogo znanstvenika i institucija koji se bave statistikom. Također postoji veoma opsežna literatura i nekoliko specijalnih znanstvenih i stručnih časopisa koji obrađuju samo statističku problematiku.

## STATISTIČKI PODACI

**Sređivanje i prikazivanje.** Mjerenje ili opažanje određenih pojava redovito rezultira određenim *skupom brojčanih podataka*. Brojčani se podaci odnose na jednu ili više promatranih veličina.

Ako se promatra samo jedna veličina  $X$ , onda je rezultat jednog mjerenja jedan realan broj  $x$ . Višestrukim ponavljanjem mjerenja veličine  $X$  dobiva se konačni niz brojeva  $x_1, \dots, x_n$ , kao rezultat  $n$  ponovljenih mjerenja. Veličina  $X$  obično se naziva *statističko obilježje* promatrane pojave, a dobiveni niz brojeva *statistički podaci*.

Ako se npr. promatranjem broja  $X$  kvarova nekog stroja u jednom tjednu zabilježe opažene vrijednosti veličine  $X$  kroz  $n=10$  tjedana, dobiva se, primjerice, niz brojeva:  $x_1=1, x_2=0, x_3=3, x_4=2, x_5=0, x_6=1, x_7=0, x_8=2, x_9=4, x_{10}=1$ . Kao rezultati opažanja veličine  $X$  mogu se pojaviti samo cijeli brojevi. Pri tome se neki brojevi mogu pojaviti i više puta, pa se govori o frekvenciji pojavljivanja nekog podatka.

Za statističko obilježje  $X$  koje može poprimiti samo vrijednosti iz nekog *diskretnog* (konačnog ili prebrojivog) skupa brojeva  $\mathcal{R}(X)$  kaže se da je *diskretno obilježje*. Prilikom opažanja (mjerenja) obilježja  $X$  dobivaju se elementi skupa  $\mathcal{R}(X)$ . Ako se u nizu od  $n$  opažanja broj  $x_j^* \in \mathcal{R}(X)$  pojavi  $v_j$  puta, kaže se da podatku  $x_j^*$  pripada frekvencija  $v_j$ , odnosno *relativna frekvencija*  $q_j = v_j/n$ , gdje je  $j = 1, \dots, r$ . Budući da je  $\sum_{j=1}^r v_j = n$ , to je  $\sum_{j=1}^r q_j = 1$ . Rezultati opažanja (mjerenja) obilježja  $X$  obično se prikazuju u tablicama (tabl. 1 i 2). Na temelju *tabličnog prikaza* statističkih podataka izrađuje se i *grafički prikaz*. Ako se na apscisu os stave vrijednosti obilježja  $X$ , a kao ordinate nanese pripadne frekvencije

Tablica 1  
TABLICA FREKVENCIJA DISKRETNOG OBILJEŽJA

Vrijednost obilježja	$x_1^*$	...	$x_j^*$	...	$x_r^*$	Zbroj
Frekvencija	$v_1$	...	$v_j$	...	$v_r$	$n$
Relativna frekvencija	$q_1$	...	$q_j$	...	$q_r$	1
Kumulativne relativne frekvencije	$q_1$	...	$\sum_{i=1}^j q_i$	...	1	