na odbacivanje hipoteze. Prihvaćanje hipoteze znači da mjerenja pokazuju da nema bitnih razlika u djelovanju pojedinih razina djelotvornog faktora na rezultate mjerenja, odnosno da su odstupanja od μ slučajna.

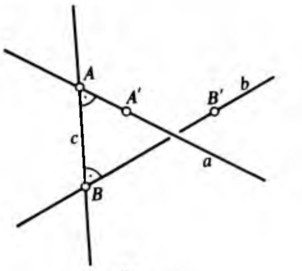
LIT.: *V. Vranić*, Vjerojatnost i statistika. Tehnička knjiga, Zagreb 1971. – *L. Breiman*, Statistics with a View Toward Applications. Houghton Mifflin Company, Boston 1973. – *Г. Крамер:* Математические методы статистики. МИР. Москва 1975. – *Ш. Закс,* Теория статистических выводов. МИР, Москва 1975. – *Z. A. Ivković*, Matematička statistika. Naučna knjiga, Beograd 1976. – *R. V. Hogg, A. T. Craig*, Introduction to Mathematical Statistics. Macmillan Publishing Co., Inc., New York [4]1978. – *R. E. Walpole, R. H. Myers*, Probability and Statistics for Engineers and Scientists. Macmillan Publishing Co., Inc., New York 1978. – *R. Jamnik*, Matematična statistika. Državna založba Slovenije, Ljubljana 1980. – *I. Pavlić*, Statistička teorija i primjena. Tehnička knjiga, Zagreb 1985. – *S. V. Vukadinović*, Elementi teorije verovatnoće i matematičke statistike. Privredni pregled, Beograd 1988.

Ž. Pauše

STEREOMETRIJA, dio geometrije koji se bavi skupovima točaka u trodimenzijskom, euklidskom prostoru (v. *Geometrija*, TE 6, str. 120). Stereometrijski su objekti geometrijska tijela i njihovi rubovi: poliedri i poliedarske plohe, različita obla tijela i oble plohe. Za likove u bilo kojoj ravnini prostora pretpostavlja se da zadovoljavaju odnose koji se proučavaju u planimetriji (v. *Planimetrija*, TE 10, str. 294).

TEMELJNI ODNOSI TOČAKA, PRAVACA I RAVNINA

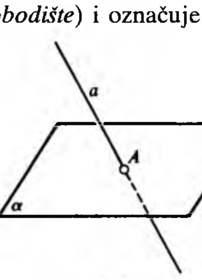
Prostorni odnosi pravaca. Dva različita pravca a i b mogu biti u istoj ravnini i u njoj se sjeći ili biti paralelni. Pravci mogu biti *mimoilazni*, tj. ne ležati u istoj ravnini. I za pravce a, b i c u prostoru iz $a \| b$ i $b \| c$ slijedi $a \| c$. Skup svih pravaca sa svojstvom da su po dva od njih paralelna zove se *smjer*, a svi pravci tog skupa *imaju isti smjer*. Kroz bilo koju točku prolazi samo jedan pravac zadanog smjera.



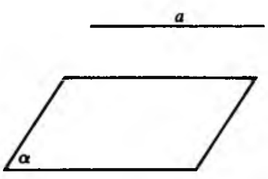
Sl. 1

Ako su a i b mimoilazni pravci, postoji samo jedan pravac c koji siječe oba pravca a i b i okomit je na svaki od njih. Tada je c *zajednička okomica* pravaca a i b. Ako je točka A sjecište pravaca a i c, a točka B sjecište pravaca b i c (sl. 1), što se označuje sa $A = a \cap c$ i $B = b \cap c$, tada se udaljenost $d(A, B)$ zove *udaljenost* mimoilaznih pravaca a i b. Za bilo koju točku A' pravca a i za bilo koju točku B' pravca b vrijedi $d(A', B') \geqq d(A, B)$, pri čemu je $d(A', B') = d(A, B)$ samo ako je $A' = A$, $B' = B$.

Prostorni odnosi pravca i ravnine. Pravac a koji ne pripada ravnini α može s tom ravninom imati najviše jednu zajedničku točku. Ako a i α imaju zajedničku točku A (sl. 2), tada se a i α *sijeku* u toj točki A (kaže se još da pravac a *probada ravninu* α u točki A), a točka A je njihovo *sjecište* (ili *probodište*) i označuje se sa $A = a \cap \alpha$.



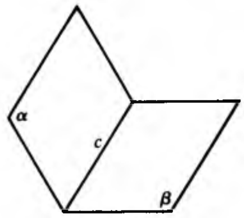
Sl. 2



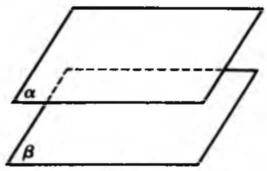
Sl. 3

Ako a i α nemaju zajedničku točku (sl. 3) ili ako pravac a pripada ravnini α, tada su a i α paralelni i piše se $a \| \alpha$ ili $\alpha \| a$. Ako ravnina siječe jedan od dva paralelna pravca, tada ona siječe i drugi. Za dva pravca a i b i dvije ravnine γ i β iz $a \| b$ i $b \| \gamma$ slijedi $a \| \gamma$, a iz $a \| \beta$ i $\beta \| \gamma$ slijedi $a \| \gamma$. Pravac je paralelan s ravninom ako je paralelan s nekim pravcem te ravnine.

Prostorni odnosi ravninâ te ravninâ i pravaca. Dvije različite ravnine α i β mogu imati zajednički jedan pravac c na kojem leže sve njihove zajedničke točke (sl. 4) ili pak mogu biti bez zajedničkih točaka (sl. 5). U prvom se slučaju ravnine α i β *sijeku* po pravcu c, a pravac c je *presječnica* tih ravnina i označuje se sa $c = \alpha \cap \beta$. U drugom slučaju, ili ako je $\alpha = \beta$, ravnine α i β su *paralelne* i piše se $\alpha \| \beta$ ili $\beta \| \alpha$.



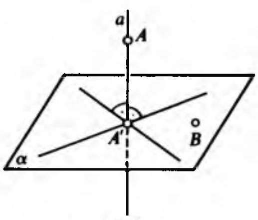
Sl. 4



Sl. 5

Za tri ravnine α, β i γ iz $\alpha \| \beta$ i $\beta \| \gamma$ slijedi $\alpha \| \gamma$. Kroz svaku točku prostora izvan zadane ravnine prolazi samo jedna ravnina koja je paralelna sa zadanom ravninom. Ako pravac ili ravnina siječe jednu od dviju paralelnih ravnina, tada siječe i drugu. Ako su α i β paralelne ravnine i ravnina ih γ siječe po pravcima a i b, tada su ti pravci paralelni. Kroz pravac paralelan sa zadanom ravninom prolazi samo jedna ravnina paralelna s tom ravninom. Ako je pravac paralelan sa svakom od dviju ravnina koje se sijeku, tada je paralelan i s njihovom presječnicom.

Pravac a je okomit na ravninu α (piše se $a \perp \alpha$ ili $\alpha \perp a$) ako tu ravninu probada u nekoj točki A' i ako je okomit bar na dva različita pravca koji pripadaju ravnini α i prolaze kroz točku A' (sl. 6); on je tada okomit i na sve takve pravce. Za bilo koju točku A i bilo koju ravninu α postoji samo jedan pravac a koji prolazi kroz točku A i okomit je na ravninu α. Pravac a se zove *okomica* iz točke A na ravninu α, a točka $A' = a \cap \alpha$ zove se ***nožište*** te okomice ili *ortogonalna projekcija* točke A na ravninu α. Ako je B bilo koja točka ravnine α različita od A', tada vrijedi $d(A, A') < d(A, B)$. Broj $d(A, A')$ zove se udaljenost točke A od ravnine α.



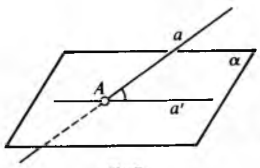
Sl. 6

Svi pravci koji prolaze kroz neku točku zadanog pravca i okomiti su na taj pravac leže u ravnini koja je okomita na taj pravac. Postoji samo jedna ravnina koja prolazi kroz tu točku i okomita je na zadani pravac. Iz $a \| b$ i $b \perp \gamma$ slijedi $a \perp \gamma$, a iz $a \perp \gamma$ i $b \perp \gamma$ slijedi $a \| b$. Iz $a \perp \beta$ i $\beta \| \gamma$ slijedi $a \perp \gamma$, a iz $a \perp \beta$ i $a \perp \gamma$ slijedi $\beta \| \gamma$.

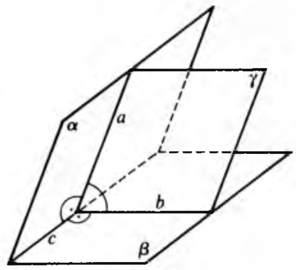
Ravnina α okomita je na ravninu β (piše se $\alpha \perp \beta$) ako ravnina α sadrži neki pravac okomit na ravninu β. Okomite se ravnine sijeku. Ako je ravnina α okomita na dvije ravnine β i γ koje se sijeku, tada je ravnina α okomita i na pravac $\beta \cap \gamma$.

Ortogonalna projekcija nekog skupa točaka $\mathcal{S}$ na zadanu ravninu ϱ zove se skup $\mathcal{S}'$ svih ortogonalnih projekcija T' pojedinih točaka T skupa $\mathcal{S}$. Shvati li se pravac kao skup svih točaka koje mu pripadaju, tada je ortogonalna projekcija zadanog pravca opet pravac ako zadani pravac nije okomit na promatranu ravninu ϱ.

Kutom pravca a s ravninom α, na koju taj pravac nije okomit, zove se kut pravca a s njegovom ortogonalnom projekcijom a' na tu ravninu (sl. 7), tj. $\measuredangle(a,\alpha)=\measuredangle(a,a')$. Ako je b bilo koji pravac u ravnini α kroz točku $A=a\cap\alpha$ različit od pravca a', tada je $\measuredangle(a,a')<\measuredangle(a,b)$. Ako je $a\perp\alpha$, tada je kut pravca a i ravnine α *pravi* kut.



Sl. 7



Sl. 8

Neka su α i β ravnine koje se sijeku po pravcu c. Ako je bilo koja ravnina okomita na pravac c (ona je okomita i na ravnine α i β), tada se *kut* ravninâ α i β zove kut pravaca $a=\alpha\cap\gamma$ i $b=\beta\cap\gamma$ (sl. 8). Taj kut, naime, ne ovisi o izabranoj ravnini γ. To znači da je $\measuredangle(\alpha,\beta)=\measuredangle(a,b)$.

Za *udaljenosti* parova točaka u prostoru vrijede svojstva koja vrijede i u planimetriji: *a*) jednakost $d(A,B)=0$ vrijedi samo ako je $A=B$, *b*) za svake dvije točke A i B vrijedi $d(A,B)=d(B,A)$, *c*) za svake tri točke A, B, C vrijedi $d(A,B)+d(B,C)\geqq d(A,C)$.

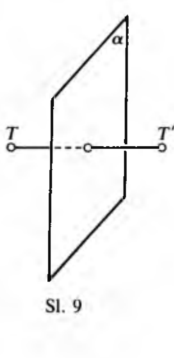
GEOMETRIJSKE TRANSFORMACIJE

Izometrija prostora je svaka transformacija prostora koja čuva udaljenost, tj. takva transformacija f da za bilo koje dvije točke A i B vrijedi $d(f(A),\ f(B))=d(A,B)$. Sve izometrije tvore grupu transformacija, tzv. *grupu izometrijâ*. Dvije su figure *sukladne* (ili *kongruentne*) ako postoji izometrija koja preslikava jednu figuru na drugu. Za bilo koja dva sukladna tetraedra postoji samo jedna izometrija koja jedan od njih preslikava na drugi.

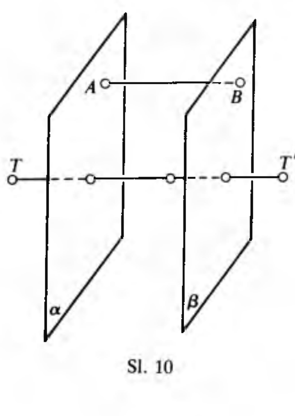
Za svaku ravninu α postoji izometrija različita od identiteta koja svaku točku ravnine α preslikava na sebe. To je tzv. *planarna simetrija* s obzirom na ravninu α. Ako je T bilo koja točka koja ne leži u ravnini α, a T' njezina simetrična slika s obzirom na tu ravninu, tada je α simetralna ravnina dužine $\overline{TT'}$ (sl. 9), tj. α je skup svih točaka X takvih da je $d(T,X)=d(T',X)$.

Svaka se izometrija može predočiti kao kompozicija od najviše četiri planarne simetrije. Kompozicija od parnog broja planarnih simetrija ne može biti jednaka kompoziciji od neparnog broja planarnih simetrija. Zato se skup svih simetrija raspada na skup tzv. *direktnih izometrija* ili *gibanja*, koje se mogu predočiti kao kompozicije od parnog broja planarnih simetrija, i na skup tzv. *indirektnih izometrija*, koje se mogu predočiti kao kompozicije od neparnog broja planarnih simetrija. Sva gibanja tvore grupu, tzv. *grupu gibanja*.

Ako su α i β paralelne ravnine, tada se kompozicija planarnih simetrija s obzirom na te ravnine zove *translacija*. Ako su A i B bilo koje točke u ravninama α i β takve da su te ravnine okomite na pravac AB, tada za bilo koju točku T i njezinu sliku T' pri promatranoj translaciji vrijedi $\overrightarrow{TT'}=2\overrightarrow{AB}$ (sl. 10).



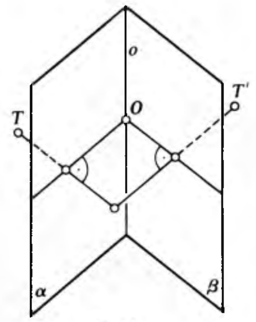
Sl. 9



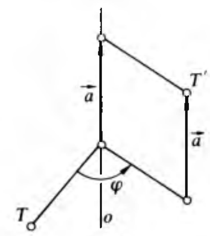
Sl. 10

Sve translacije tvore komutativnu grupu (tj. za dvije translacije f i g uvijek vrijedi $fg=gf$), tzv. *grupu translacija*. Komponiranje translacija odgovara zbrajanju vektora. Za bilo koje dvije točke A i B postoji samo jedna translacija koja preslikava točku A na točku B. Translacija preslikava svaki pravac (ili ravninu) na s njime paralelan pravac (ili ravninu).

Ako se ravnine α i β sijeku po pravcu o, tada se kompozicija planarnih simetrija s obzirom na te ravnine zove *rotacija oko pravca o*, a pravac o se zove *os* te rotacije. Ako je T bilo koja točka koja ne pripada osi o, a T' njezina slika pri promatranoj rotaciji, tada je $\measuredangle TOT'=2\measuredangle(\alpha,\beta)$, gdje je O sjecište osi o s ravninom koja prolazi kroz točku T i okomita je na tu os (sl. 11). To je rotacija *za kut* $2\measuredangle(\alpha,\beta)$ oko osi o. Sve rotacije oko osi o tvore komutativnu grupu, tzv. *grupu rotacija oko osi o*. Rotacija oko osi o za kut π zove se još i *aksijalna simetrija s osi o*.



Sl. 11



Sl. 12

Kompozicija rotacije oko osi o za neki kut φ i translacije za neki vektor $\vec{a}$ paralelan s tom osi (sl. 12) zove se *zavojno gibanje uzduž pravca o*. Posebno, kad je $\varphi=0$, zavojno je gibanje translacija, kad je $\vec{a}=\vec{0}$, to je rotacija, a kad je $\varphi=0$, i $\vec{a}=\vec{0}$, to je identitet. Svako je gibanje zavojno gibanje uzduž nekog pravca.

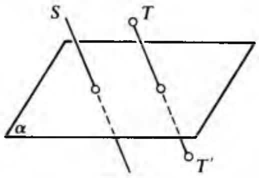
Homotetija sa *središtem O* i *koeficijentom k* (k je bilo koji realan broj, $k\neq 0$) transformacija je koja bilo kojoj točki T pridružuje točku T' takvu da vrijedi $\overrightarrow{OT'}=k\overrightarrow{OT}$. Posebno se za $k=1$ dobiva identitet, a za $k=-1$ centralna simetrija s obzirom na točku O. Sve homotetije sa središtem O tvore komutativnu grupu, a isto tako sve homotetije i sve translacije tvore grupu. Pri komponiranju homotetija njihovi se koeficijenti množe. Homotetija s koeficijentom k naziva se *direktna* ako je $k>0$, a *indirektna* ako je $k<0$.

Ekviformna transformacija je bilo koja kompozicija od konačno mnogo izometrija i homotetija, a svaka ekviformna transformacija može se predočiti kao kompozicija jednog gibanja i jedne homotetije. To predočenje nije jedinstveno, ali u svim takvim predočenjima zadane ekviformne transformacije homotetije imaju isti koeficijent k, koji se zove *koeficijent* te ekviformne transformacije. Već prema tome da li je $k>0$ ili $k<0$, ekviformna se transformacija zove *direktna* odnosno *indirektna*. Posebno, kad je $k=1$, to je direktna izometrija, a kad je $k=-1$, to je indirektna izometrija.

Ako je f ekviformna transformacija s koeficijentom k, tada za bilo koje točke A i B vrijedi $d(f(A),f(B))=|k|d(A,B)$. Ekviformne transformacije tvore grupu, tzv. *ekviformnu grupu*. Pri komponiranju ekviformnih transformacija pripadni se koeficijenti množe.

Dvije su figure *slične* (*direktno* ili *indirektno*) ako postoji ekviformna transformacija (direktna ili indirektna) koja preslikava jednu figuru na drugu. Za svaka dva slična tetraedra postoji samo jedna ekviformna transformacija koja jedan od njih preslikava na drugi.

Afina planarna simetrija u smjeru S s obzirom na ravninu α (smjer S nije paralelan s α) jest transformacija koja bilo koju točku ravnine α preslikava na nju samu, a bilo koju točku T koja ne leži u ravnini α preslikava u točku T' takvu da pravac TT' ima smjer S, a polovište dužine $\overline{TT'}$ leži u ravnini α (sl. 13).

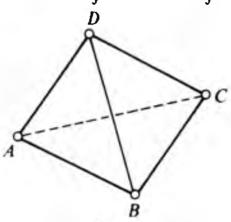


Sl. 13

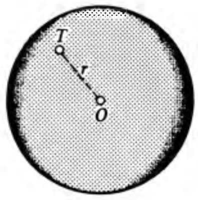
Ekviafinitet je kompozicija od konačno mnogo afinih planarnih simetrija. Svi ekviafiniteti tvore grupu, tzv. *ekviafinu grupu*. Svaki se ekviafinitet može predočiti kao kompozicija od najviše četiri afine planarne simetrije. Kompozicija od parnog broja afinih planarnih simetrija ne može biti jednaka kompoziciji od neparnog broja afinih planarnih simetrija. Zato se skup svih ekviafiniteta raspada na skup tzv. *direktnih* ekviafiniteta, koji se mogu predočiti kao kompozicije od parnog broja afinih planarnih simetrija, i na skup tzv. *indirektnih* ekviafiniteta, koji se mogu predočiti kao kompozicije od neparnog broja afinih planarnih simetrija.

Afinitet je transformacija prostora koja preslikava pravce i ravnine opet na pravce i ravnine i čuva paralelnost pravaca, odnosno ravnina. Za svaka dva tetraedra postoji samo jedan afinitet koji preslikava jedan od njih na drugi. Ekviformne transformacije i ekviafiniteti su afiniteti. Afinitet čuva djelišni omjer triju točaka na istom pravcu. Skup svih afiniteta tvori grupu, tzv. *afinu grupu*. Svaki se afinitet može predočiti kao kompozicija nekog direktnog ekviafiniteta i neke homotetije. To predočenje nije jedinstveno, ali pri svakom takvu predočenju homotetije imaju isti koeficijent k, koji se zove koeficijent promatranog afiniteta. Već prema tome da li je $k>0$ ili $k<0$, afinitet je *direktan*, ili *indirektan*. Posebno, kad je $k=1$, to je direktni, a kad je $k=-1$, to je indirektni ekviafinitet. Pri komponiranju afiniteta njihovi se koeficijenti množe. Svi direktni afiniteti tvore također jednu grupu.

Tetraedar je *orijentiran* ako je istaknut neki poredak njegovih vrhova. Dva orijentirana tetraedra *imaju istu orijentaciju* ili *suprotne orijentacije*, već prema tome da li je afinitet koji preslikava jedan od njih na drugi direktan ili indirektan.



Sl. 14



Sl. 15

Skup se svih orijentiranih tetraedara raspada na dva podskupa tako da svaka dva orijentirana tetraedra iz istog podskupa imaju istu orijentaciju, a svaka dva orijentirana tetraedra iz različitih podskupova imaju suprotne orijentacije. Ta dva podskupa zovu se *orijentacije* na skupu tetraedara. Za jednu se orijentaciju kaže da je *pozitivna*, a za drugu da je *negativna*. Ako orijentirani tetraedar pripada pozitivnoj ili negativnoj orijentaciji, tada je on *pozitivno*, ili *negativno orijentiran*. Obično se orijentacije biraju tako da se orijentirani tetraedar $ABCD$ na sl. 14 smatra pozitivno orijentiranim.

FIGURE

Figura je bilo koji skup točaka u prostoru.

Sfera i kugla. Neka je zadana točka O i duljina r. Skup $\mathcal{S}$ točaka T takvih da je $d(O,T)=r$ zove se *sfera* (ili kuglina ploha) sa *središtem* O i *polumjerom* r, a skup $\mathcal{K}$ točaka T takvih da je $d(O,T)<r$ zove se *kugla s rubom* $\mathcal{S}$, *središtem* O i *polumjerom* r (sl. 15).

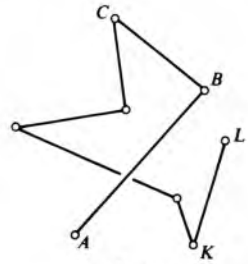
Otvorene i zatvorene figure. Točka T je *unutrašnja* točka figure $\mathcal{F}$ ako postoji kugla sa središtem T koja je sadržana u figuri $\mathcal{F}$. Točka T je *vanjska* točka figure $\mathcal{F}$ ako postoji kugla sa središtem T koja nema nijednu zajedničku točku s figurom $\mathcal{F}$. Točka T je *rubna* točka figure $\mathcal{F}$ ako svaka kugla sa središtem T ima zajedničkih točaka s figurom $\mathcal{F}$, ali sadrži i točke koje ne pripadaju toj figuri. Figura $\mathcal{F}$ sadrži sve svoje unutrašnje točke, ne sadrži nijednu svoju vanjsku točku, a rubna točka figure može, ali ne mora, pripadati toj figuri. Skup svih rubnih točaka figure $\mathcal{F}$ zove se *rub* te figure.

Figura $\mathcal{F}$ je *zbroj* figura $\mathcal{F}_1$ i $\mathcal{F}_2$ ako svaka točka figure $\mathcal{F}_1$ i svaka točka figure $\mathcal{F}_2$ pripadaju figuri $\mathcal{F}$, a svaka točka figure $\mathcal{F}$ pripada bar jednoj od figura $\mathcal{F}_1$ i $\mathcal{F}_2$ koje nemaju zajedničkih unutrašnjih točaka. Slično se definira i zbroj više od dvije figure.

Figura $\mathcal{F}$ je *otvorena* ako joj je svaka točka unutrašnja točka, tj. ako ne sadrži nijednu svoju rubnu točku. Figura $\mathcal{F}$ je *zatvorena* ako sadrži sve svoje rubne točke. Figura $\mathcal{F}$ je *omeđena* ako postoji kugla u kojoj je ta figura sadržana. U protivnome figura $\mathcal{F}$ je neomeđena.

Neka su $\mathcal{F}_1$ i $\mathcal{F}_2$ dvije zatvorene figure. Ako je T_1 bilo koja točka figure $\mathcal{F}_1$ a T_2 bilo koja točka figure $\mathcal{F}_2$, tada od svih udaljenosti $d(T_1,T_2)$ postoji najmanja. Ta najmanja udaljenost zove se *udaljenost figura* $\mathcal{F}_1$ i $\mathcal{F}_2$. Posebno, ako je $\mathcal{F}_1$ skup od jedne jedine točke T_1 (a to je zatvorena figura), udaljenost figura je udaljenost točke T_1 od figure $\mathcal{F}_2$.

Poligonalne crte. Ako su $A, B, C, \ldots, K, L$ bilo koje točke, tada se skup koji se sastoji od tih točaka i svih točaka pojedinih dužina $\overline{AB}, \overline{BC}, \ldots, \overline{KL}$ zove *poligonalna crta* s *vrhovima* $A, B, C, \ldots, K, L$, *krajevima* A i L i *stranicama* $\overline{AB}, \overline{BC}, \ldots, \overline{KL}$ i označuje se sa $ABC\ldots KL$ (sl. 16).



Sl. 16

Povezane figure. Figura $\mathcal{F}$ je *povezana* ako za bilo koje dvije točke A i B te figure postoji poligonalna crta s krajevima A i B koja je sadržana u figuri $\mathcal{F}$.

Figura $\mathcal{F}$ *dijeli prostor na dva dijela* $\mathcal{F}_1$ i $\mathcal{F}_2$ ako vrijede ova svojstva: *a*) svaka točka prostora pripada samo jednoj od figura $\mathcal{F}$, $\mathcal{F}_1$ i $\mathcal{F}_2$, *b*) svaka je od figura $\mathcal{F}$, $\mathcal{F}_1$ i $\mathcal{F}_2$ povezana, *c*) za svaku poligonalnu crtu s jednim krajem u figuri $\mathcal{F}_1$ i drugim krajem u figuri $\mathcal{F}_2$ figura $\mathcal{F}$ sadrži bar jednu točku te poligonalne crte.

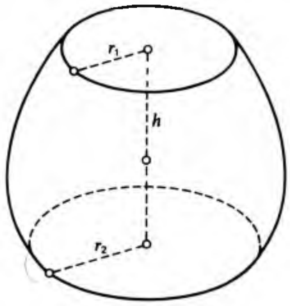
Svaka ravnina ϱ dijeli prostor na dva dijela od kojih se svaki zove *otvoreni poluprostor* s *rubom* ϱ (to su otvoreni skupovi, a ϱ im je zajednički rub). Svaki od tih dvaju otvorenih poluprostora zajedno sa svojim rubom ϱ tvore zatvoreni skup koji se zove *zatvoreni poluprostor* s *rubom* ϱ.

Geometrijska tijela. Zatvorena omeđena povezana figura zove se *geometrijsko tijelo*.

Konveksne figure. Figura je *konveksna* ako zajedno s bilo koje svoje dvije točke A i B sadrži i svaku točku dužine $\overline{AB}$. Presjek (tj. zajednički dio) konveksnih figura je konveksna figura. Poluprostor (otvoren ili zatvoren) konveksna je figura. Svaka je konveksna figura presjek izvjesnog broja (možda i beskonačnog) poluprostorâ. Za svaku figuru $\mathcal{F}$ postoji najmanja konveksna figura koja sadrži figuru $\mathcal{F}$. To je presjek svih konveksnih figura koje sadrže figuru $\mathcal{F}$, a zove se *konveksna ljuska* figure $\mathcal{F}$.

Konveksna ljuska dviju paralelnih ravnina ϱ_1 i ϱ_2 s udaljenošću h zove se *sloj* s visinom h *između ravnina* ϱ_1 i ϱ_2.

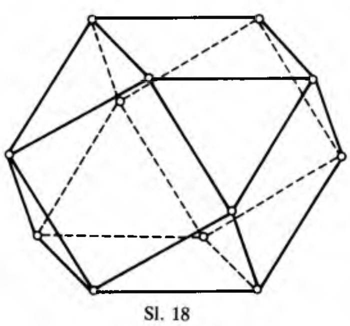
Neka je $\mathcal{K}$ kugla polumjera r, $\mathcal{S}$ sfera koja je rub te kugle i $\mathcal{K}$ sloj visine h između paralelnih ravnina ϱ_1 i ϱ_2 koje sijeku tu sferu, tj. udaljenosti su im od središta sfere manje od r. Očito je $h \leqq 2r$. Ravnine ϱ_1 i ϱ_2 sijeku sferu $\mathcal{S}$ po dvije kružnice k_1 i k_2 koje se mogu svesti i na po jednu točku. Neka su r_1 i r_2 polumjeri tih kružnica (može biti i $r_1 = 0$ ili $r_2 = 0$). Presjek kugle $\mathcal{K}$ sa slojem $\mathcal{H}$ geometrijsko je tijelo koje se zove *kuglin sloj* s polumjerima r_1 i r_2 i visinom h. Presjek sfere $\mathcal{S}$ sa slojem $\mathcal{H}$ ploha je koja se zove *sferin sloj* s visinom h (sl. 17).

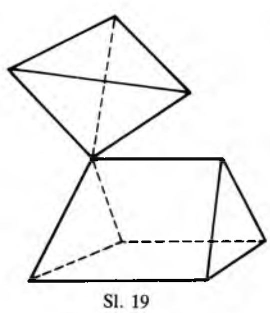


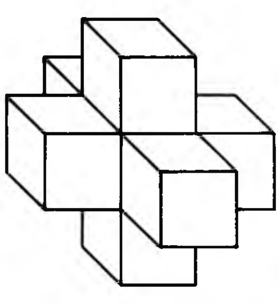
Sl. 17

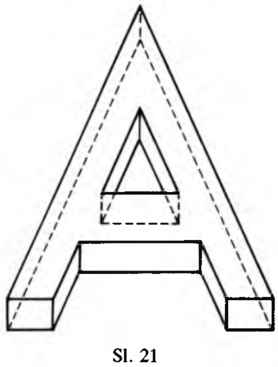
Tetraedar. Neka su A, B, C i D bilo koje točke koje ne pripadaju jednoj ravnini. Konveksna ljuska tih točaka zove se *tetraedar* i označuje se s $ABCD$ (sl. 14). Točke A, B, C i D su vrhovi, dužine $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, $\overline{AD}$, $\overline{BC}$, $\overline{BD}$ i $\overline{CD}$ su *bridovi*, a trokuti ABC, ABD, ACD i BCD su *strane* tog tetraedra. Rub tetraedra sastoji se od njegovih vrhova, bridova i strana. Vrh A je *nasuprot* strani BCD, a brid $\overline{AB}$ je *nasuprot* bridu $\overline{CD}$. Analogno vrijedi za ostale elemente (vrhove, bridove i strane) tetraedra $ABCD$.

Poliedri. Konveksna ljuska konačnog skupa točaka koji nije sadržan u jednoj ravnini zove se *konveksni poliedar*. Rub se konveksnog poliedra sastoji od konačno mnogo konveksnih poligona. Svaki se od tih poligona zove *strana*, a vrhovi i stranice tih poligona *vrhovi* su i *bridovi* konveksnog poliedra. Na sl. 18 predočen je konveksan poliedar sa 12 vrhova, 24 brida i 14 strana (8 trokuta i 6 četverokuta). Tetraedar je najjednostavniji konveksni poliedar. Geometrijsko tijelo koje se može predočiti kao zbroj od konačno mnogo konveksnih poliedara zove se *poliedar*. Svaki konveksni poliedar je poliedar, ali obrnuto ne vrijedi. Na sl. 19 do 21 predočeni su poliedri koji nisu konveksni. Svaki se poliedar može predočiti kao zbroj od konačno mnogo tetraedara. Za konveksne poliedre (a i za neke druge poliedre, ali ne za sve poliedre) vrijedi tzv. *Eulerova formula* $v - b + s = 2$, gdje je v broj vrhova, b broj bridova, a s broj strana.

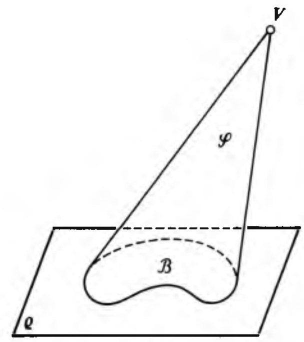

Sl. 18


Sl. 19

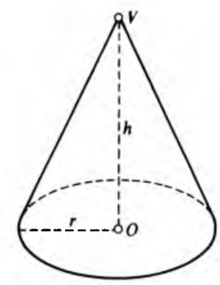

Sl. 20


Sl. 21

Stošci i piramide. Neka je u ravnini ϱ zadana figura $\mathcal{B}$ i neka je V bilo koja točka koja ne pripada ravnini ϱ. Figura $\mathcal{S}$ koja sadrži sve dužine oblika $\overline{VT}$, gdje je T bilo koja točka figure $\mathcal{B}$, zove se *stožac* s *osnovkom* $\mathcal{B}$ i *vrhom* V (sl. 22). Udaljenost h točke V od ravnine ϱ zove se *visina* stošca $\mathcal{S}$. Promatrana dužina $\overline{VT}$ zove se *izvodnica* stošca $\mathcal{S}$ ako je T rubna točka osnovke $\mathcal{B}$, a sve izvodnice tvore *plašt* stošca. Rub stošca sastoji se od osnovke i plašta. Stožac kojemu je osnovka krug polumjera r zove se *kružni stožac polumjera r*. Ako je ortogonalna projekcija vrha V kružnog stošca $\mathcal{S}$ na ravninu njegove osnovke, tj. kruga $\mathcal{B}$, upravo središte O toga kruga, tada je $\mathcal{S}$ *uspravan kružni stožac* ili tzv. *rotacioni stožac* s *osi* OV (sl. 23).



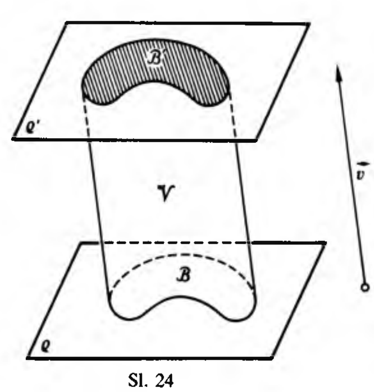
Sl. 22



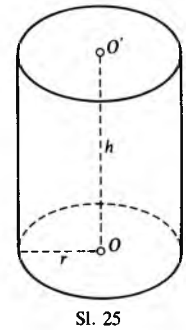
Sl. 23

Ako je osnovka $\mathcal{B}$ stošca $\mathcal{P}$ poligon, tada se taj stožac zove *piramida*, a plašt toga stošca zove se i *pobočje* piramide. To se pobočje sastoji od nekoliko trokuta, koji se zovu *pobočke* piramide. Stranice osnovke $\mathcal{B}$ ujedno su i stranice pobočaka i zovu se *osnovni bridovi*, a ostale stranice pobočaka su *pobočni bridovi* piramide. Ako je osnovka n-terokut, tada je $\mathcal{P}$ *n-terostrana piramida*. Trostrana je piramida zapravo tetraedar. Piramida je *pravilna* ako je njezina osnovka $\mathcal{B}$ pravilan poligon sa središtem O, a ortogonalna je projekcija vrha V piramide upravo ta točka O. Pobočke su pravilne piramide jednakokračni trokuti, a svi su pobočni bridovi jednaki. Piramide su poliedri.

Valjci i prizme. Neka je $\mathcal{B}$ figura u nekoj ravnini ϱ, a $\mathcal{B}'$ njezina slika pri nekoj translaciji f za vektor $\vec{v}$ koji nije paralelan s ravninom ϱ. Figura $\mathcal{V}$ koja sadrži sve dužine oblika $\overline{TT'}$, gdje je T bilo koja točka figure $\mathcal{B}$, a $T' = f(T)$, zove se *valjak* s osnovkama $\mathcal{B}$ i $\mathcal{B}'$ (sl. 24). Promatrana dužina $\overline{TT'}$ zove se *izvodnica* valjka $\mathcal{V}$ ako je T rubna točka osnovke $\mathcal{B}$, a sve izvodnice tvore *plašt* valjka. Rub valjka sastoji se od osnovaka i plašta. Udaljenost h ravnine ϱ od ravnine ϱ' osnovke $\mathcal{B}'$ zove se *visina* valjka $\mathcal{V}$. Ako je vektor $\vec{v}$ okomit na ravninu ϱ, tada je $\mathcal{V}$ *uspravan valjak*. Valjak kojem su osnovke krugovi polumjera r zove se *kružni valjak* polumjera r. Uspravan kružni valjak (sl. 25) zove se još i *rotacioni valjak* s *osi* OO', gdje su O i O' središta osnovaka $\mathcal{B}$ i $\mathcal{B}'$.

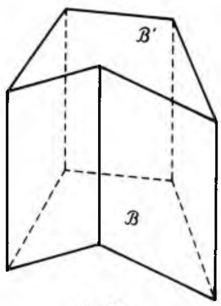


Sl. 24



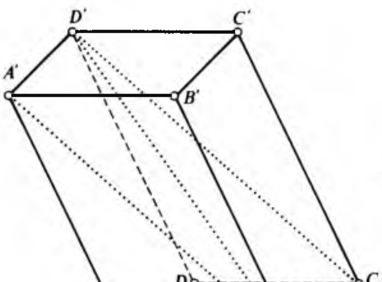
Sl. 25

Ako je osnovka $\mathcal{B}$ valjka $\mathcal{P}$ poligon, tada se taj valjak zove *prizma*, a plašt tog valjka zove se i *pobočje* te prizme. To se pobočje sastoji od nekoliko paralelograma, koji se zovu *pobočke* prizme. Stranice su osnovaka $\mathcal{B}$ i $\mathcal{B}'$ ujedno i stranice pobočaka i zovu se *osnovni bridovi*, a ostale su stranice pobočaka *pobočni bridovi* prizme. Svi su pobočni bridovi jednaki. Vrhovi od $\mathcal{B}$ i $\mathcal{B}'$ su vrhovi prizme $\mathcal{P}$. Ako je $\mathcal{B}$ n-terokut, tada je $\mathcal{P}$ *n-terostrana prizma.* Na sl. 26 predočena je peterostrana prizma. Kad je prizma uspravna, sve su pobočke pravokutnici. *Pravilna prizma* je uspravna prizma kojoj su osnovke pravilni poligoni. Prizme su poliedri.

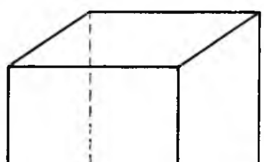


Sl. 26

Paralelepiped je prizma kojoj su osnovke paralelogrami. Tada su i sve strane paralelepipeda paralelogrami. Dvije su strane paralelepipeda *suprotne* ako nemaju nijedan zajednički vrh. Dva su vrha paralelepipeda *suprotna* ako ne pripadaju istoj strani. Isto tako, dva su brida paralelepipeda *suprotna* ako ne pripadaju istoj strani, ali pripadaju paralelnim pravcima. Dužina koja spaja dva suprotna vrha zove se *dijagonala* paralelepipeda. Dva su suprotna brida stranice paralelograma koji se zove *dijagonalni presjek* paralelepipeda. Na sl. 27 predočen je paralelepiped s vrhovima $A, B, C, D, A', B', C', D'$. Paralelogrami $ADD'A'$ i $BCC'B'$ tvore par suprotnih strana. Par je suprotnih vrhova npr. B, D', pa je $\overline{BD'}$ jedna od dijagonala. Par je suprotnih bridova npr. $\overline{BC}$, $\overline{A'D'}$, pa je $BCD'A'$ jedan od dijagonalnih presjeka promatranog paralelepipeda.



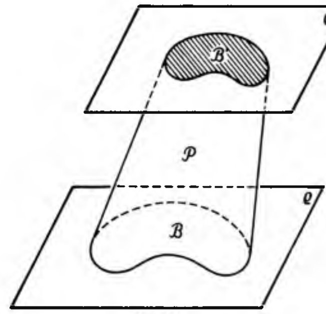
Sl. 27



Sl. 28

Paralelepiped kojem bridovi iz istog vrha pripadaju međusobno okomitim pravcima zove se *kvadar.* Sve su strane kvadra pravokutnici. Sve su dijagonale kvadra (ima ih četiri) jednake. Ako su a, b i c duljine bridova iz istog vrha, a d duljina dijagonale kvadra, tada je $d^2 = a^2 + b^2 + c^2$. Kvadar kojemu svi bridovi imaju istu duljinu zove se *kocka* (sl. 28). Sve strane kocke su kvadrati. Ako je a duljina brida kocke, tada je $a\sqrt{3}$ duljina njezine dijagonale.

Krnji stožac i krnja piramida. Neka je $\mathcal{B}$ figura u nekoj ravnini ϱ i $\mathcal{B}'$ njezina slika pri nekoj homotetiji f s pozitivnim koeficijentom i središtem koje ne leži u ravnini ϱ. Figura $\mathcal{S}$ koja sadrži sve dužine oblika $\overline{TT'}$, gdje je T bilo koja točka figure $\mathcal{B}$, a $T' = f(T)$, zove se *krnji stožac* s *osnovkama* $\mathcal{B}$ i $\mathcal{B}'$ (sl. 29). Promatrana dužina $\overline{TT'}$ zove se *izvodnica* krnjeg stošca $\mathcal{S}$ ako je T rubna točka osnovke $\mathcal{B}$, a sve izvodnice

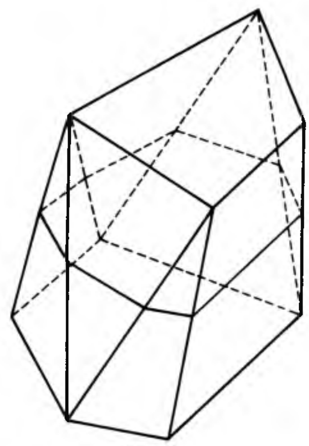


Sl. 29

tvore *plašt* krnjeg stošca. Udaljenost h ravnine ϱ od ravnine ϱ' osnovke $\mathcal{B}$ zove se *visina* krnjeg stošca $\mathcal{S}$. Rub krnjeg stošca sastoji se od njegovih osnovaka i plašta.

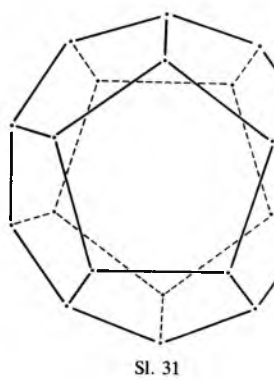
Ako je $\mathcal{B}$ poligon, tada se pripadni krnji stožac zove *krnja piramida.* Plašt krnje piramide sastoji se od nekoliko trapeza.

Prizmatoid. Neka su $\mathcal{B}$ i $\mathcal{B}'$ poligoni koji pripadaju dvjema paralelnim ravninama ϱ i ϱ'. Poliedar $\mathcal{P}$ kojemu su strane $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}'$ i trokuti ili trapezi s po jednim ili dva vrha na svakoj od strana $\mathcal{B}$ i $\mathcal{B}'$ zove se *prizmatoid* s osnovkama $\mathcal{B}$ i $\mathcal{B}'$ i visinom h, gdje je h udaljenost ravnina ϱ i ϱ' (sl. 30). Simetralna ravnina dviju ravnina ϱ i ϱ' siječe prizmatoid $\mathcal{P}$ po poligonu $\mathcal{B}''$ koji se zove *srednji presjek* tog prizmatoida. Prizmatoid kojemu su osnovke sukladni pravilni n-terokuti, a ostale su strane međusobno sukladni jednakokračni trokuti, i ima ih $2n$, zove se pravilna *n-terostrana antiprizma.*

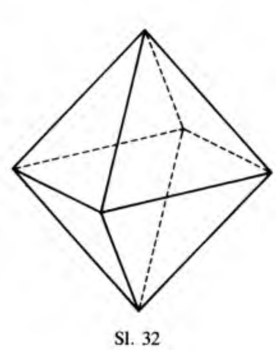


Sl. 30

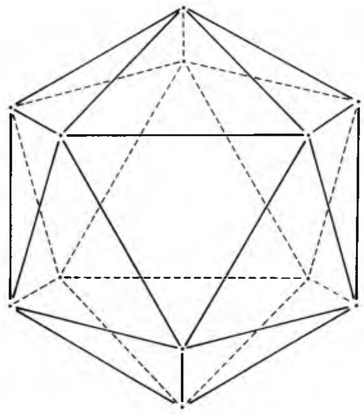
Pravilni poliedri. *Pravilni poliedar* ili *Platonovo tijelo* konveksni je poliedar kojemu su sve strane sukladni pravilni poligoni (npr. n-terokuti), a svaki vrh poliedra pripada istom broju strana, npr. m. Na sl. 31 je poliedar sastavljen od pravilnih peterokuta, a na sl. 32 i 33 od pravilnih trokuta. Postoji pet do sličnosti različitih pravilnih poliedara. U tabl. 1 predočeni su osnovni podaci za te poliedre, gdje je v broj vrhova, b broj bridova, a s broj strana. Kocka i pravilni oktaedar, te pravilni dodekaedar i pravilni ikozaedar međusobno su *dualni* pravilni poliedri (dok je pravilni tetraedar



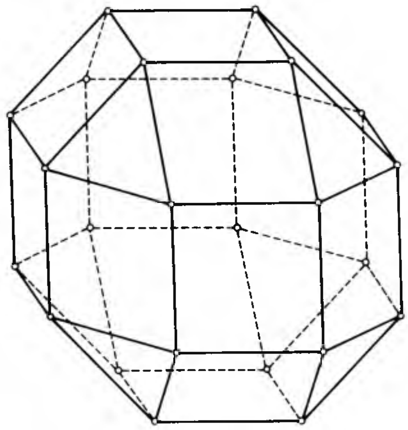
Sl. 31



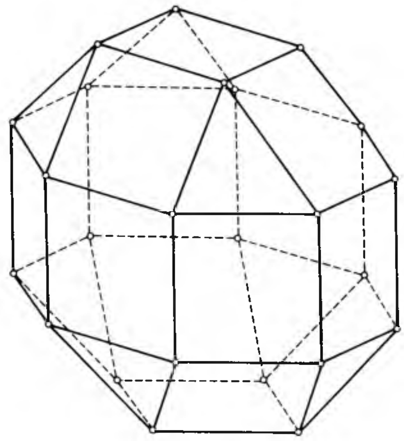
Sl. 32



Sl. 33



Sl. 34



Sl. 35

dualan sam sebi) u smislu da su središta strana pravilnog poliedra vrhovi drugoga pravilnog poliedra, koji je dualan polaznom. Dualnost parova pravilnih poliedara vidi se i iz tabl. 1. Brojevi n, m, v, b i s pravilnog poliedra jednaki su redom brojevima m, n, s, b i v dualnoga pravilnog poliedra. U tabl. 2 nalaze se još neki podaci o pravilnim poliedrima: a je duljina brida, R, r i ϱ su udaljenosti središta poliedra od vrhova, strana i bridova, tj. polumjeri *opisane* i *upisane sfere* i sfere koja dira sve bridove, O i V su oplošje i obujam poliedra, a φ kut između dviju susjednih strana.

Tablica 1
ELEMENTI PRAVILNIH POLIEDARA

Pravilni poliedar	n	m	v	b	s
Tetraedar	3	3	4	6	4
Heksaedar (kocka)	4	3	8	12	6
Oktaedar (sl. 32)	3	4	6	12	8
Dodekaedar (sl. 31)	5	3	20	30	12
Ikozaedar (sl. 33)	3	5	12	30	20

Tablica 2
METRIČKI PODACI O PRAVILNIM POLIEDRIMA

Pravilni poliedar	$\frac{R}{a}$	$\frac{r}{a}$	$\frac{\varrho}{a}$	$\frac{O}{a^2}$	$\frac{V}{a^3}$	$\cos\varphi$	φ
Tetraedar	$\frac{\sqrt{6}}{4}$	$\frac{\sqrt{6}}{12}$	$\frac{\sqrt{2}}{4}$	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{2}}{12}$	$\frac{1}{3}$	70°31′43,6″
Heksaedar	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	6	1	0	90°
Oktaedar	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{6}}{6}$	$\frac{1}{2}$	$2\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{2}}{3}$	$-\frac{1}{2}$	109°28′16,4″
Dodekaedar	$\frac{\sqrt{3}}{4}(\sqrt{5}+1)$	$\frac{1}{20}\sqrt{250+110\sqrt{5}}$	$\frac{1}{4}(3+\sqrt{5}$	$3\sqrt{25+10\sqrt{5}}$	$\frac{1}{4}(15+7\sqrt{5})$	$-\frac{\sqrt{5}}{5}$	116°33′54,2″
Ikozaedar	$\frac{1}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}$	$\frac{3}{12}(3+\sqrt{5})$	$\frac{1}{4}\sqrt{5}+1)$	$5\sqrt{3}$	$\frac{5}{12}(3+\sqrt{5})$	$-\frac{\sqrt{5}}{3}$	138°11′22,9″

Polupravilni poliedri. *Arhimedov poliedar* ili *Arhimedovo tijelo* konveksni je poliedar kojemu su sve strane pravilni poligoni (ali svi nisu sukladni) i takav da za svaka dva njegova vrha postoji izometrija prostora koja preslikava jedan vrh na drugi, a poliedar sam na sebe, tj. svaki njegov vrh preslikava se opet u neki njegov vrh. Svaki vrh Arhimedova poliedra pripada istom broju strana.

Pravilna n-terostrana prizma (za $n = 3, 5, 6, \ldots$) s jednakim osnovnim i pobočnim bridovima Arhimedov je poliedar sa $2n$ vrhova, $3n$ bridova i $n+2$ strane (dva pravilna n-terokuta i n kvadrata). Svaki vrh pripada jednom n-terokutu i dvama kvadratima. Za $n = 4$ dobiva se kocka, koja se ne smatra Arhimedovim poliedrom. Pravilna n-terostrana antiprizma (za $n = 4, 5, 6, \ldots$) s jednakim svim bridovima Arhimedov je poliedar sa $2n$ vrhova, $4n$ bridova i $2n+2$ strane. Svaki vrh pripada jednom n-terokutu i trima trokutima, kojih ima po dva odnosno $2n$.

Osim tih pravilnih prizama i antiprizama postoji još 14 (do sličnosti) različitih Arhimedovih poliedara. Na svakom od tih poliedara strane tvore dvije ili tri klase međusobno sukladnih poligona. To su pravilni n_1-terokuti, n_2-terokuti i (eventualno)

Tablica 3
ELEMENTI ARHIMEDOVIH POLIEDARA

Polupravilni poliedar	m_1	m_2	m_3	n_1	n_2	n_3	s_1	s_2	s_3	s	b	v
Zarubljeni tetraedar	2	1		6	3		4	4		8	18	12
Zarubljeni oktaedar	2	1		6	4		8	6		14	36	24
Zarubljeni heksaedar	2	1		8	3		6	8		14	36	24
Zarubljeni ikozaedar	2	1		6	5		20	12		32	90	60
Zarubljeni dodekaedar	2	1		10	3		12	20		32	90	60
Kubooktaedar (sl. 18)	2	2		3	4		8	6		14	24	12
Ikozidodekaedar	2	2		3	5		20	12		32	60	30
Rombokubooktaedar	3	1		4	3		18	8		26	48	24
Vitoperi heksaedroid	4	1		3	4		32	6		38	60	24
Vitoperi dodekaedroid	4	1		3	5		80	12		92	150	60
Zarubljeni kubooktaedar	1	1	1	4	6	8	12	8	6	26	72	48
Zarubljeni ikozidodekaedar	1	1	1	4	6	10	30	20	12	62	180	120
Romboikozidodekaedar	2	1	1	4	3	5	30	20	12	62	120	60

n_3-terokuti, kojih ima po s_1, s_2 i s_3, a ukupno s, te ih je po m_1, m_2 i m_3 u svakom vrhu pri čemu je v broj vrhova i b broj bridova. Podaci za tih 14 Arhimedovih poliedara nalaze se u tabl. 3, gdje su zajedno navedeni podaci (jer su isti) i za tzv. *polupravilni rombokubooktaedar prve, odnosno druge vrste,* koji nisu slični (sl. 34 i 35).

Središta strana nekog Arhimedova poliedra vrhovi su poliedra *dualnog* promatranom poliedru. Arhimedovi i njima dualni poliedri nazivaju se *polupravilnim poliedrima.*

MJERENJE FIGURA

Obujam poliedra. Svakom poliedru $\mathcal{P}$ može se na jedinstven način pridružiti pozitivan realni broj $v(\mathcal{P})$ tako da vrijede svojstva: *a*) sukladnim je poliedrima pridružen isti broj, *b*) ako je poliedar $\mathcal{P}$ zbroj poliedara $\mathcal{Q}$ i $\mathcal{P}$, tada je $v(\mathcal{P}) = v(\mathcal{Q}) + v(\mathcal{R})$, *c*) kocki s bridom duljine 1 pridružen je broj 1. Broj $v(\mathcal{P})$ zove se *obujam* poliedra $\mathcal{P}$. Prema tome, obujam je na skupu **P** svih poliedara funkcija $v: P \to \mathbb{R}^+$ takva da za nju vrijede svojstva *a*), *b*) i *c*).

Obujam kvadra jednak je umnošku duljina triju njegovih bridova iz istog vrha. Obujam prizme jednak je umnošku ploštine njezine osnovke s njezinom visinom. Obujam je piramide jednak trećini umnoška ploštine njezine osnovke s njezinom visinom. Ako je poliedar na bilo koji način predočen kao zbroj tetraedara, tada je obujam tog poliedra jednak zbroju obujmova tih tetraedara. Krnja piramida $\mathscr{P}$ s osnovkama $\mathscr{B}$ i $\mathscr{B}'$ te s visinom h ima obujam

$$v(\mathscr{P}) = \frac{h}{3}\left[p(\mathscr{B}) + \sqrt{p(\mathscr{B})p(\mathscr{B}')} + p(\mathscr{B}')\right], \tag{1}$$

gdje je p ploština. Prizmatoid $\mathscr{P}$ s osnovkama $\mathscr{B}$ i $\mathscr{B}'$ te sa srednjim presjekom $\mathscr{B}''$ i visinom h ima obujam

$$v(\mathscr{B}) = \frac{h}{6}\left[p(\mathscr{B}) + p(\mathscr{B}') + 4p(\mathscr{B}'')\right]. \tag{2}$$

Izmjerljive figure (u smislu obujma). Figura $\mathscr{F}$ je izmjerljiva (u smislu obujma) ako za bilo koji pozitivan realni broj ε postoje poliedri $\mathscr{P}$ i $\mathscr{Q}$ takvi da je $\mathscr{P}$ sadržan u $\mathscr{F}$, a da je $\mathscr{F}$ sadržan u $\mathscr{Q}$, te da je $v(\mathscr{Q}) - v(\mathscr{P}) < \varepsilon$, tj. da se razlika obujmova poliedara $\mathscr{Q}$ i $\mathscr{P}$ može učiniti po volji malenom. Tada postoji broj $v(\mathscr{F})$ koji nije manji od obujma bilo kojeg poliedra $\mathscr{P}$, a nije veći od obujma bilo kojeg poliedra $\mathscr{Q}$ iz prethodne definicije. Taj broj $v(\mathscr{F})$ zove se *obujam* izmjerljive figure $\mathscr{F}$. Postoje i figure koje nisu izmjerljive.

Ako je figura $\mathscr{F}' = f(\mathscr{F})$ slika izmjerljive figure $\mathscr{F}$ pri afinitetu f s koeficijentom k, tada vrijedi jednakost $v(\mathscr{F}') = k^2 v(\mathscr{F})$. Posebno, ta jednakost vrijedi i ako je f sličnost s koeficijentom k. Prema tome, ekviafiniteti i izometrije čuvaju obujam.

Kugla je izmjerljivo geometrijsko tijelo. Kugla s polumjerom r ima obujam $4r^3\pi/3$.

Ako su osnovke valjka, stošca ili krnjeg stošca izmjerljive figure (u smislu ploštine), tada su i ta geometrijska tijela izmjerljiva (u smislu obujma). Valjak $\mathscr{V}$ s osnovkom $\mathscr{B}$ i visinom h ima obujam $v(\mathscr{V}) = hp(\mathscr{B})$, gdje je p ploština. Stožac $\mathscr{S}$ s osnovkom $\mathscr{B}$ i visinom h ima obujam $v(\mathscr{S}) = hp(\mathscr{B})/3$. Krnji stožac $\mathscr{P}$ s osnovkama $\mathscr{B}$ i $\mathscr{B}'$ te visinom h ima obujam prema formuli (1). Kuglin sloj s polumjerima r_1 i r_2 i visinom h ima obujam $(r_1^2 + r_2^2 + h^2/3)h\pi/2$.

Oplošje plohe. Precizna definicija plohe složen je matematički problem. Zato se navodi samo nekoliko primjera plohâ: ravnina, poligon, krug, sfera, rub poliedra, rub valjka, plašt valjka, rub stošca, plašt stošca.

Neka je $\mathscr{L}$ zadana ploha. Za bilo koji pozitivan realni broj d promatra se skup $\mathscr{K}_d(\mathscr{L})$ svih onih točaka prostora kojima je udaljenost od plohe $\mathscr{L}$ manja ili jednaka d. Broj $o(\mathscr{L})$ zove se *oplošje* plohe $\mathscr{L}$ koja je *izmjerljiva* (u smislu oplošja) ako se apsolutna vrijednost razlike $o(\mathscr{L}) - \frac{1}{2d}v(\mathscr{K}_d(\mathscr{L}))$ može načiniti po volji malenom, gdje je v obujam. Točnije, ako je ε bilo koji pozitivan realni broj, tada mora postojati pozitivan realni broj d takav da vrijedi

$$\left|o(\mathscr{L}) - \frac{1}{2d}v(\mathscr{K}_d(\mathscr{L}))\right| < \varepsilon. \tag{3}$$

Ta je definicija oplošja u skladu s definicijom ploštine skupa točaka u ravnini (izmjerljivog u smislu ploštine), jer je za takav skup točaka oplošje toga skupa jednako njegovoj ploštini.

Sfera, sferin sloj, plašt i rub valjka, stošca i krnjeg stošca izmjerljive su plohe. Sfera polumjera r ima oplošje $4r^2\pi$. Sferin sloj visine h sfere s polumjerom r ima oplošje $2rh\pi$. Rotacioni valjak s polumjerom r i visinom h ima oplošje plašta $2rh\pi$ i oplošje ruba $2r(r+h)\pi$. Rotacioni stožac s polumjerom r i s izvodnicom duljine s ima oplošje plašta $rs\pi$ i oplošje ruba $r(r+s)\pi$. Krnji rotacioni stožac s izvodnicom duljine s i s osnovkama polumjerâ r i r' ima oplošje plašta $(r+r')s\pi$ i oplošje ruba $(r^2 + rs + r'^2 + r's)\pi$.

Rub poliedra izmjerljiva je ploha i njezino je oplošje jednako zbroju ploština pojedinih strana tog poliedra. U tabl. 2 mogu se naći oplošja i obujmovi pravilnih poliedara izraženi pomoću duljina njihovih bridova.

Duljina luka krivulje. *Luk krivulje* $\mathscr{L}$ obostrano je jednoznačna neprekidna slika s nekog segmenta realnih brojeva u prostor. Za bilo koji pozitivan realni broj d promatra se skup $\mathscr{K}_d(\mathscr{L})$ svih točaka prostora kojima je udaljenost od luka $\mathscr{L}$ manja ili jednaka d. Broj $l(\mathscr{L})$ zove se duljina luka $\mathscr{L}$ koji je *izmjerljiv* (u smislu duljine) ako se apsolutna vrijednost razlike $l(\mathscr{L}) - \frac{1}{d^2\pi}v(\mathscr{K}_d(\mathscr{L}))$ može načiniti po volji malenom, tj. ako za svaki pozitivan realni broj ε postoji pozitivan realni broj d takav da vrijedi

$$\left|l(\mathscr{L}) - \frac{1}{d^2\pi}v(\mathscr{K}_d(\mathscr{L}))\right| < \varepsilon, \tag{4}$$

gdje je v obujam.

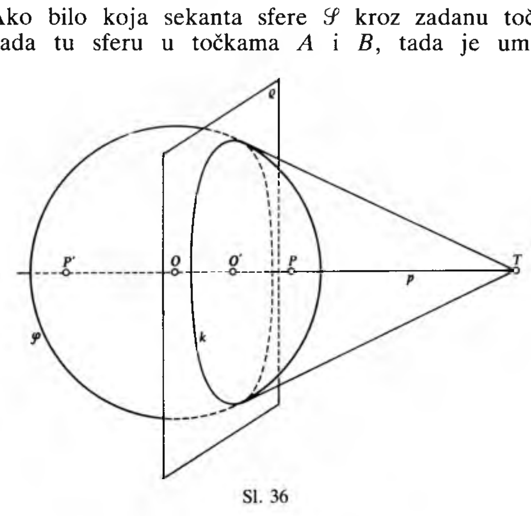
GEOMETRIJA SFERÂ

Odnos sfere s točkama, pravcima i ravninama. Neka je $\mathscr{S}$ sfera sa središtem O i polumjerom r, tj. $\mathscr{S}$ je skup točaka T takvih da je $d(O,T) = r$. Takva točka T *leži na sferi* $\mathscr{S}$. Ako je pak $d(O,T) < r$ ili $d(O,T) > r$, tada je točka T *unutar* ili *izvan* sfere $\mathscr{S}$. Četiri točke koje ne leže u istoj ravnini uvijek pripadaju jedinstvenoj sferi, tj. svakom tetraedru može se *opisati* jedinstvena sfera.

Pravac p ima sa sferom $\mathscr{S}$ dvije, jednu ili nijednu zajedničku točku, već prema tome da li je udaljenost središta O sfere od tog pravca manja od r, jednaka r ili veća od r. U prvom slučaju pravac p *probada* sferu $\mathscr{S}$ u dvije točke ili p je *sekanta* sfere $\mathscr{S}$. U drugom slučaju pravac p *dira* sferu $\mathscr{S}$ u jednoj točki, koja se zove *dirálište* pravca p sa sferom $\mathscr{S}$, a pravac p je *tangenta* sfere $\mathscr{S}$ u tom dirálištu. Pravac kroz središte sfere zove se *promjer* te sfere. Bilo koji promjer sfere probada tu sferu u dvije točke koje su *dijametralno suprotne* točke te sfere.

Neka je d udaljenost središta O sfere $\mathscr{S}$ od zadane ravnine ϱ. Ako je udaljenost d manja od polumjera r te sfere, tada ravnina ϱ ima sa sferom $\mathscr{S}$ zajedničke točke i one sve leže na jednoj kružnici k s polumjerom $\sqrt{r^2 - d^2}$ i središtem O' koje je ortogonalna projekcija točke O na ravninu ϱ (sl. 36), pa ravnina ϱ *siječe* sferu $\mathscr{S}$ po kružnici k. Posebno, ako je $d = 0$, dobiva se tzv. *dijametralna* ravnina ϱ sfere $\mathscr{S}$ koja tu sferu siječe po kružnici k sa središtem O i polumjerom r. Takva kružnica k zove se *glavna* ili *velika* kružnica sfere $\mathscr{S}$. Ako je $0 < d < r$, tada ravnina ϱ siječe sferu $\mathscr{S}$ po tzv. *sporednoj* ili *maloj* kružnici te sfere. Ako je udaljenost d ravnine ϱ od središta O sfere $\mathscr{S}$ jednaka polumjeru r te sfere, tada ravnina ϱ ima sa sferom $\mathscr{S}$ samo jednu zajedničku točku R, pa ravnina ϱ *dira* sferu $\mathscr{S}$ u točki R, koja se zove *dirálište* te ravnine sa sferom $\mathscr{S}$. Kaže se još da je ravnina ϱ *tangencijalna* ravnina sfere $\mathscr{S}$ u njezinoj točki R. U toj ravnini leže sve tangente sfere $\mathscr{S}$ u točki R.

Ako bilo koja sekanta sfere $\mathscr{S}$ kroz zadanu točku T probada tu sferu u točkama A i B, tada je umnožak



Sl. 36

$d(T,A)\cdot d(T,B)$ isti za sve takve sekante. Ako je točka T izvan ili unutar sfere $\mathscr{S}$, tada se broj $d(T,A)\cdot d(T,B)$ ili $-d(T,A)\cdot d(T,B)$ zove *potencija* točke T s obzirom na sferu $\mathscr{S}$ i označuje se sa $p(T,\mathscr{S})$. Za točku T na sferi $\mathscr{S}$ uzima se da je $p(T,\mathscr{S})=0$. Uvijek je $p(T,\mathscr{S})=d^2-r^2$, gdje je $d=d(O,T)$, a O i r su središte i polumjer sfere $\mathscr{S}$.

Polaritet s obzirom na sferu. Točka T i ravnina ϱ su *polarne* s obzirom na sferu $\mathscr{S}$ sa središtem O i polumjerom r ako je umnožak udaljenosti točke O od točke T i od ravnine ϱ jednak kvadratu polumjera r, tj. ako vrijedi $d(O,T)\cdot d(O,O')=r^2$, gdje je O' ortogonalna projekcija točke O na ravninu ϱ. Kaže se još da je T pol ravnine ϱ ili da je ϱ polarna ravnina točke T s obzirom na sferu $\mathscr{S}$. Pravac kroz točke O i T okomit je na ravninu ϱ. Posebno, smatra se da je pol dijametralne ravnine sfere beskonačno daleka točka u smjeru okomitom na tu ravninu, te da je polarna ravnina središta sfere beskonačno daleka ravnina prostora.

Ako ravnina ϱ siječe sferu $\mathscr{S}$ po kružnici k (sl. 36), tada sve tangencijalne ravnine te sfere s diralištima na kružnici k prolaze kroz pol T ravnine ϱ s obzirom na sferu $\mathscr{S}$, a pol T je izvan te sfere. Obrnuto, ako je T točka izvan sfere $\mathscr{S}$, tada sve tangente i tangencijalne ravnine te sfere koje prolaze kroz točku T imaju dirališta na kružnici k koja leži u polarnoj ravnini ϱ točke T s obzirom na sferu $\mathscr{S}$. Polarna ravnina točke T na sferi $\mathscr{S}$ s obzirom na tu sferu upravo je tangencijalna ravnina te sfere u točki T. Polarna ravnina točke unutar sfere $\mathscr{S}$ s obzirom na tu sferu nema zajedničkih točaka s tom sferom. Tako npr. na sl. 36 polarna ravnina točke O' prolazi kroz točku T i okomita je na pravac p.

Ako jedna točka leži u polarnoj ravnini druge točke, tada i druga točka leži u polarnoj ravnini prve točke. Takve su dvije točke *konjugirane* s obzirom na promatranu sferu $\mathscr{S}$.

Polarne ravnine pojedinih točaka zadanog pravca p s obzirom na sferu $\mathscr{S}$ prolaze kroz jedan pravac p'. Pravci p i p' *recipročni* su s obzirom na sferu $\mathscr{S}$. Odnos je tih pravaca simetričan, tj. polarne ravnine točaka pravca p' prolaze kroz pravac p. Dijametralne su ravnine sfere $\mathscr{S}$ kroz pravce p i p' međusobno okomite, zajednička okomica pravca p i p' prolazi kroz središte O sfere $\mathscr{S}$, a umnožak udaljenosti točke O od pravca p i p' jednak je kvadratu polumjera sfere $\mathscr{S}$. Smatra se da je promjer sfere recipročan s beskonačno dalekim pravcem bilo koje ravnine okomite na taj pravac. Treba spomenuti da se smatra da međusobno paralelni pravci ili ravnine imaju istu beskonačno daleku točku ili isti beskonačno daleki pravac te da sve beskonačno daleke točke i svi beskonačno daleki pravci leže u jedinoj beskonačno dalekoj ravnini prostora.

Odnosi dviju i više sfera. Dvije su sfere *koncentrične* ako imaju isto središte. Neka su $\mathscr{S}_1$ i $\mathscr{S}_2$ dvije sfere sa središtima O_1 i O_2 te polumjerima r_1 i r_2, koje nisu koncentrične, tj. neka je $d=d(O_1,O_2)>0$. Ako je $d<|r_1-r_2|$ ili $d>r_1+r_2$, tada sfere $\mathscr{S}_1$ i $\mathscr{S}_2$ nemaju zajedničkih točaka. U prvom je slučaju $r_1 \neq r_2$, pa ako je npr. $r_1<r_2$, tada je sfera $\mathscr{S}_1$ unutar sfere $\mathscr{S}_2$, a u drugom je slučaju svaka od dviju sfera izvan druge sfere. Ako je $d=|r_1-r_2|$ ili $d=r_1+r_2$, tada sfere $\mathscr{S}_1$ i $\mathscr{S}_2$ imaju samo jednu zajedničku točku D i one se *diraju* u točki D, koja se zove *dirališe* tih sfera. U prvom se slučaju sfere diraju *iznutra,* a u drugom slučaju *izvana.* Ako je $|r_1-r_2|<d<r_1+r_2$, sfere $\mathscr{S}_1$ i $\mathscr{S}_2$ imaju zajedničke točke i sve takve točke leže na jednoj kružnici k. Kaže se da se sfere $\mathscr{S}_1$ i $\mathscr{S}_2$ *sijeku* po kružnici k.

Neka sfere $\mathscr{S}_1$ i $\mathscr{S}_2$ imaju zajedničku točku T i neka su τ_1 i τ_2 tangencijalne ravnine tih sfera u točki T. Kut ravnina τ_1 i τ_2 zove se *kut* sfera $\mathscr{S}_1$ i $\mathscr{S}_2$, jer on ne ovisi o tome koja je zajednička točka T odabrana. Uz navedene oznake za taj kut vrijedi

$$\cos\varphi=\frac{|r_1^2+r_2^2-d^2|}{2r_1r_2}. \qquad (5)$$

Sfere su *ortogonalne* ako je njihov kut pravi, a ako je $\varphi=0$, tada se sfere $\mathscr{S}_1$ i $\mathscr{S}_2$ diraju.

Ako su $\mathscr{S}_1$ i $\mathscr{S}_2$ dvije sfere s različitim središtima O_1 i O_2, tada je skup točaka T takvih da je $p(T,\mathscr{S}_1)=p(T,\mathscr{S}_2)$ ravnina okomita na pravac O_1O_2 koja se zove potencijalna ravnina sfera $\mathscr{S}_1$ i $\mathscr{S}_2$ i koja sadrži sve zajedničke točke tih sfera.

Ako su $\mathscr{S}_1$, $\mathscr{S}_2$ i $\mathscr{S}_3$ sfere kojima središta O_1, O_2 i O_3 ne leže na jednom pravcu, tada tri potencijalne ravnine parova tih sfera imaju zajednički pravac okomit na ravninu $O_1O_2O_3$ koji se zove *potencijalna os* sfera $\mathscr{S}_1$, $\mathscr{S}_2$ i $\mathscr{S}_3$. Za svaku točku T tog pravca vrijedi $p(T,\mathscr{S}_1)=p(T,\mathscr{S}_2)=p(T,\mathscr{S}_3)$.

Ako su $\mathscr{S}_1$, $\mathscr{S}_2$, $\mathscr{S}_3$ i $\mathscr{S}_4$ sfere kojima središta ne leže u jednoj ravnini, tada šest potencijalnih ravnina parova tih sfera i četiri potencijalne osi trojki tih sfera imaju zajedničku točku koja se zove *potencijalno središte* sfera $\mathscr{S}_1$, $\mathscr{S}_2$, $\mathscr{S}_3$ i $\mathscr{S}_4$ jer ta točka ima jednake potencije s obzirom na te sfere.

Inverzija s obzirom na sferu. Neka je zadana sfera $\mathscr{S}$ sa središtem O i polumjerom r. *Inverzija* s obzirom na sferu $\mathscr{S}$ je transformacija prostora gdje svaki par pridruženih točaka T i T' pripada istom polupravcu s početkom u O i pritom vrijedi da je $d(O,T)\cdot d(O,T')=r^2$ (na sl. 36 pridružene su točke T i O').

Promatrana inverzija sama je sebi inverzna transformacija koja preslikava pravce i ravnine kroz točku O samo na sebe. Ostale pravce i ravnine preslikava na kružnice i sfere kroz točku O, a takve pak kružnice i sfere preslikava na pravce i ravnine, dok ostale kružnice i sfere preslikava opet na kružnice i sfere. Za primjenu inverzija korisno je smatrati da je prostor nadopunjen jednom jedinom beskonačno dalekom točkom za koju se smatra da pripada svakom pravcu i svakoj ravnini. Osim toga, pravci se i ravnine shvaćaju kao specijalni slučajevi kružnica i sfera. Uz takav dogovor promatrana inverzija pridružuje točku O beskonačno dalekoj točki i preslikava kružnice i sfere opet u kružnice i sfere.

Inverzija je *konformna* transformacija, tj. čuva kutove krivulja i ploha, pri čemu se kutovi krivulja ili ploha u nekoj točki definiraju kao kutovi pripadnih tangenata ili tangencijalnih ravnina tih krivulja ili ploha u promatranoj točki.

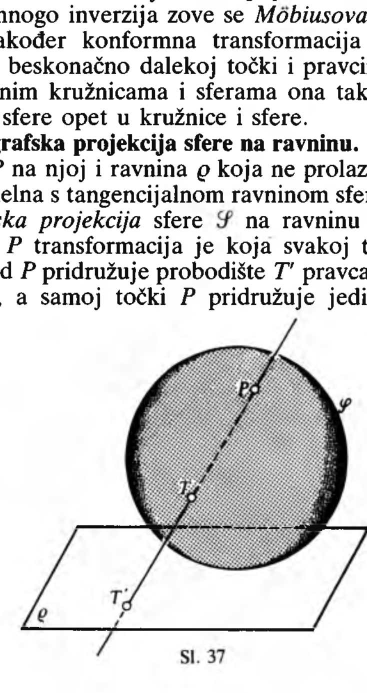
Ako su T i T' pridružene točke inverzije s obzirom na sferu $\mathscr{S}$, tada je svaka sfera kroz točke T i T' ortogonalna na sferu $\mathscr{S}$. Ako su A i A' te B i B' bilo koja dva para pridruženih točaka promatrane inverzije, tada postoji kružnica koja prolazi kroz te točke i vrijedi da je

$$d(A',B')=\frac{d(A,B)}{d(O,A)\cdot d(O,B)}r^2. \qquad (6)$$

Ako su A i A', B i B' te C i C' bilo koja tri para pridruženih točaka, tada postoji sfera koja prolazi kroz sve te točke.

Kompozicija dviju inverzija s obzirom na dvije koncentrične sfere sa središtem O i polumjera r_1 i r_2 homotetija je sa središtem O i koeficijentom r_2^2/r_1^2. Svaka kompozicija od konačno mnogo inverzija zove se *Möbiusova transformacija.* Ona je također konformna transformacija i uz navedeni dogovor o beskonačno dalekoj točki i pravcima i ravninama kao posebnim kružnicama i sferama ona također preslikava kružnice i sfere opet u kružnice i sfere.

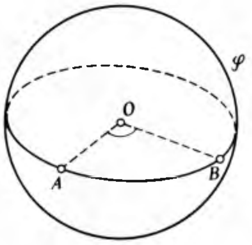
Stereografska projekcija sfere na ravninu. Zadana je sfera $\mathscr{S}$, točka P na njoj i ravnina ϱ koja ne prolazi kroz tu točku, ali je paralelna s tangencijalnom ravninom sfere $\mathscr{S}$ u toj točki. *Stereografska projekcija* sfere $\mathscr{S}$ na ravninu ϱ sa središtem projekcije P transformacija je koja svakoj točki T sfere $\mathscr{S}$ različitoj od P pridružuje probodište T' pravca PT s ravninom ϱ (sl. 37), a samoj točki P pridružuje jedinu beskonačno



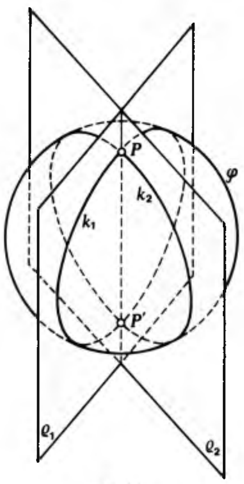
Sl. 37

daleku točku te ravnine. Stereografska je projekcija konformna transformacija koja preslikava kružnice sfere $\mathcal{S}$ na pravce ili kružnice ravnine ϱ već prema tome da li kružnice na sferi prolaze ili ne prolaze kroz točku P. Promatrana stereografska projekcija ima na sferu $\mathcal{S}$ isto djelovanje kao i inverzija s obzirom na sferu sa središtem P i polumjerom $\sqrt{2rd}$, gdje je r polumjer sfere $\mathcal{S}$, a d udaljenost točke P od ravnine ϱ.

Kružnice i krugovi na sferi. Kroz dvije točke A i B sfere koje nisu dijametralno suprotne prolazi samo jedna glavna kružnica (sl. 38), a kroz tri točke među kojima nema dijametralno suprotnih prolazi samo jedna kružnica (glavna ili sporedna). Dvije glavne kružnice na sferi imaju zajedničke dvije dijametralno suprotne točke (sl. 39). Duljina manjeg luka $\widehat{AB}$ glavne kružnice kroz točke A i B na sferi zove se *sferna udaljenost* tih točaka, a izražava se brojčanom vrijednošću kuta $\measuredangle AOB$ u radijanima (sl. 38). Dijametralno suprotne točke imaju sfernu udaljenost π. Promjer p sfere $\mathcal{S}$ okomit na ravninu ϱ kružnice k na toj sferi probada sferu $\mathcal{S}$ u dijametralno suprotnim točkama P i P' (sl. 36) koje se zovu *sferna središta* ili *polovi* kružnice k, dok se pravac p zove *os* te kružnice. Sve točke kružnice k imaju istu sfernu udaljenost od pola te kružnice. Ta sferna udaljenost zove se *sferni polumjer* kružnice k. Sferni polumjer glavne kružnice jednak je $\pi/2$, a sporedna kružnica ima dva sferna polumjera kojima je zbroj jednak π.



Sl. 38



Sl. 39

Neka su k_1 i k_2 dvije glavne kružnice na sferi $\mathcal{S}$ koje pripadaju ravninama ϱ_1 i ϱ_2. Kut tih dviju ravnina zove se kut glavnih kružnica k_1 i k_2 (sl. 39). Ako je taj kut pravi, glavne su kružnice k_1 i k_2 *ortogonalne*. Kut dviju glavnih kružnica jednak je sfernoj udaljenosti para njihovih polova. Sve glavne kružnice, ortogonalne na zadanu glavnu kružnicu k, prolaze kroz polove te kružnice. Obratno, svaka je glavna kružnica kroz polove glavne kružnice k ortogonalna na k. Kroz točku koja nije pol glavne kružnice k prolazi samo jedna glavna kružnica ortogonalna na k. Za svake dvije glavne kružnice postoji samo jedna glavna kružnica ortogonalna na svaku od njih.

Neka je k sporedna kružnica sfere $\mathcal{S}$ u ravnini ϱ, a P i P' njezini polovi (sl. 36). Skup svih točaka sfere $\mathcal{S}$ koje su u poluprostoru s rubom ϱ koji ne sadrži središte O sfere $\mathcal{S}$ zove se *sferni krug* (ili *kalota*) s *rubom k* i *središtem P*, gdje je P onaj pol kružnice k koji se nalazi u tom poluprostoru.

Sferne figure. Bilo koji skup $\mathcal{F}$ točaka na sferi $\mathcal{S}$ je sferna *figura*. Točka T sferne figure $\mathcal{F}$ je *unutrašnja* točka te figure ako postoji sferni krug sa središtem T koji je sadržan u figuri $\mathcal{F}$. Sferna figura $\mathcal{F}$ je *zbroj* sfernih figura $\mathcal{F}_1$ i $\mathcal{F}_2$ ako svaka točka od $\mathcal{F}_1$ i svaka točka od $\mathcal{F}_2$ pripadaju sfernoj figuri $\mathcal{F}$, a svaka točka od $\mathcal{F}$ pripada bar jednoj od sfernih figura $\mathcal{F}_1$ i $\mathcal{F}_2$ koje nemaju zajedničkih unutrašnjih točaka.

Ako su $A_1, A_2, \ldots, A_n, A_{n+1}$ točke na sferi $\mathcal{S}$, tada se skup svih tih točaka pojedinih manjih lukova $\widehat{A_1A_2}$, $\widehat{A_2A_3}$, ..., $\widehat{A_nA_{n+1}}$ glavnih kružnica zove *sferna poligonalna crta* s *vrhovima* $A_1, A_2, \ldots, A_n, A_{n+1}$, s *krajevima* A_1 i A_{n+1} te sa *stranicama* $\widehat{A_1A_2}$, $\widehat{A_2A_3}, \ldots, \widehat{A_nA_{n+1}}$, a označuje se sa $A_1A_2 \ldots A_{n+1}$. Ta je sferna poligonalna crta *zatvorena* ako je $A_{n+1} = A_1$ i tada se označuje sa $A_1A_2 \ldots A_n$. Sferna je poligonalna crta *jednostavna* ako svaka točka neke njezine stranice pripada samo toj stranici, a svaki je njezin vrh kraj najviše dviju stranica i ne pripada više nijednoj stranici.

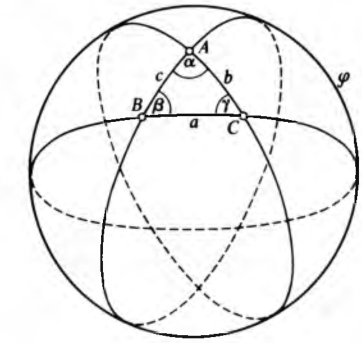
Sferna figura $\mathcal{F}$ je *povezana* ako za bilo koje dvije točke A i B od $\mathcal{F}$ postoji sferna poligonalna crta s krajevima A i B koja je sadržana u $\mathcal{F}$.

Sferna figura $\mathcal{F}$ *dijeli* sferu $\mathcal{S}$ na *dva dijela* $\mathcal{F}_1$ i $\mathcal{F}_2$ ako vrijede ova svojstva: *a*) svaka točka sfere $\mathcal{S}$ pripada samo jednoj od figura $\mathcal{F}$, $\mathcal{F}_1$ i $\mathcal{F}_2$, *b*) svaka je od figura $\mathcal{F}$, $\mathcal{F}_1$ i $\mathcal{F}_2$ povezana, *c*) za svaku sfernu poligonalnu crtu s jednim krajem u $\mathcal{F}_1$ i drugim krajem u $\mathcal{F}_2$ sferna figura $\mathcal{F}$ sadrži bar jednu točku te sferne poligonalne crte.

Svaka glavna kružnica k dijeli sferu $\mathcal{S}$ na dvije *otvorene polusfere* s *rubom k*. Svaka od tih dviju otvorenih polusfera zajedno s kružnicom k tvori skup koji se zove *zatvorena polusfera* s *rubom k*. Svaka sporedna kružnica k dijeli sferu $\mathcal{S}$ na dva dijela od kojih je jedan dio sferni krug s rubom k.

Jednostavni sferni poligoni. Svaka zatvorena jednostavna sferna poligonalna crta dijeli sferu $\mathcal{S}$ na dva dijela. Skup svih točaka bilo kojeg od tih dijelova i svih točaka te sferne poligonalne crte zove se *jednostavni sferni poligon*, kojemu je taj dio *nutrina*, a promatrana sferna poligonalna crta mu je *rub*. Vrhovi i stranice njegova ruba zovu se *vrhovi* i *stranice* toga jednostavnog sfernog poligona. Jednostavni sferni poligon koji ima n vrhova zove se još i *sferni n-terokut*.

Sferni trokuti. Sferni je trokut poseban slučaj sfernog n-terokuta za $n = 3$. Na sl. 40 predočen je sferni trokut s vrhovima A, B i C te stranicama $\widehat{AB}$, $\widehat{BC}$ i $\widehat{CA}$. Kut promatranoga sfernog trokuta ABC u nekom njegovu vrhu jest kut glavnih kružnica kojima pripadaju stranice s krajevima u tom vrhu. Na sl. 40 vide se kutovi u vrhovima A, B i C označeni redom s α, β i γ. Sferne udaljenosti parova vrhova također se zovu *stranicama* sfernog trokuta. Na sl. 40 te su stranice označene sa a, b i c. Stranica a i kut α su *suprotni*, a isto tako b i β te c i γ. Osim toga, kut α se nalazi *između* stranica b i c, a stranica b *između* kutova α i γ itd.



Sl. 40

Dva su sferna trokuta (na istoj sferi $\mathcal{S}$) sukladna ako su im međusobno jednaki ovi elementi: *a*) sve tri stranice; *b*) sva tri kuta; *c*) dvije stranice i kut među njima; *d*) dva kuta i stranica među njima; *e*) dvije stranice i kut suprotan jednoj od njih (ako su kutovi suprotni drugim stranicama u oba trokuta istodobno šiljasti, pravi ili tupi) i *f*) dva kuta i stranica suprotna jednome od njih (ako su stranice suprotne drugim kutovima istodobno u oba trokuta ili manje, ili jednake ili veće od $\pi/2$).

U sfernom trokutu svaka je stranica manja od zbroja ostalih dviju stranica, a zbroj je svih stranica manji od 2π. Zbroj je kutova veći od π, a manji od 3π. Kut $\varepsilon = \alpha + \beta + \gamma - \pi$ zove se *sferni eksces* sfernog trokuta ABC na sl. 40. Jednakim kutovima sfernog trokuta odgovaraju jednake suprotne stranice i, obratno, jednakim stranicama odgovaraju jednaki suprotni kutovi. Većoj stranici odgovara veći suprotni kut, i obratno, većem kutu odgovara veća suprotna stranica.

Među sfernim trokutima posebno su zanimljivi *pravokutni* sferni trokuti, kojima je jedan kut pravi. Ako je ABC pravokutan trokut s pravim kutom γ, tada se stranice a i b zovu *katete*, a stranica c *hipotenuza*.

Ploština sfernog poligona. Svaki je jednostavni sferni poligon zbroj od konačno mnogo sfernih trokuta. *Kutom* sfernog n-terokuta u nekom njegovu vrhu naziva se zbroj kutova u tom vrhu onih sfernih trokuta kojima je zbroj promatrani sferni n-terokut, a koji imaju taj vrh sfernog trokuta za svoj vrh. Kutovi sfernog n-terokuta ne ovise o tome kako je taj sferni n-terokut predočen kao zbroj sfernih trokuta. Za sferni n-terokut s kutovima $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$ kut $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n - (n-2)\pi$ zove se sferni eksces toga sfernog n-terokuta. On je uvijek pozitivan.

Oplošje sfernog n-terokuta na sferi polumjera r (koje se zove još i *ploština* toga sfernog n-terokuta) jednako je $r^2\varepsilon$, gdje je ε sferni eksces toga sfernog n-terokuta. Posebno je ploština sfernog trokuta s kutovima α, β i γ jednaka $r^2(\alpha+\beta+\gamma-\pi)$.

Povezana sferna figura koja se može predočiti kao zbroj jednostavnih sfernih poligona zove se *sferni poligon*, a njegova *ploština* je jednaka zbroju ploština tih jednostavnih sfernih poligona i ne ovisi o tome kako je sferni poligon predočen kao zbroj jednostavnih sfernih poligona.

V. Volenec

STIJENE I STUPOVI. Stijene su građevne konstrukcije koje bočno ograničuju neki prostor prema okolišu ili prema ostalim prostorima, a stupovi su stijene različita horizontalnog presjeka i ograničene duljine koja je manja od četvrtine visine stupa.

Pojam stijena širi je od pojma zid. Zidom se, naime, najprije smatrala stijena izgrađena od prirodnog ili umjetnog kamena, a kasnije se taj naziv proširio i na ostale stijene od masivnog materijala.

Zadatak je stijena da prostor koji okružuju zaštite od okolišnih utjecaja topline, vlage, vjetra i buke, te da preuzimaju i prenose, osim vlastite težine, i opterećenja ostalih konstrukcija koje neposredno ili posredno počivaju na njima.

Izbor vrste stijene, odnosno materijala i izradbe, ovisi o zahtjevima što ih stijena treba zadovoljiti, a to su: stabilnost, trajnost, ekonomičnost, sigurnost od požara i potresa, zaštita od vlage, zvuka i temperaturnih promjena, estetski izgled, mjesne prilike i dr. Dakako, nijedna stijena ne zadovoljava sve spomenute zahtjeve, pa je potrebno izabrati takvu njezinu konstrukciju koja se najbolje prilagođuje tim zahtjevima.

Stijene se mogu svrstati: *a*) prema vrsti materijala (kamen, drvo, opeka i dr.), *b*) prema vrsti konstrukcije (masivna, skeletna konstrukcija), *c*) prema načinu izvedbe (gradnja na gradilištu, polumontažna i montažna gradnja), *d*) prema položaju i zadaći (glavne, razdjelne, pregradne, vatrobrane, ogradne i potporne stijene) i *e*) prema otpornosti na požar (utjecaj požara na rušenje konstrukcije, prodor plamena, otpornost prema povišenju temperature).

DRVENE STIJENE I STUPOVI

Zbog osjetljivosti prema vlazi i vatri te zbog utezanja i bubrenja drveta djelovanjem vlage potrebna je posebna pažnja pri konstrukciji i izradbi te pri održavanju drvenih stijena. Drvene su stijene, unatoč maloj debljini, dobra toplinska izolacija, a vrlo su lagane, pa nisu potrebni jaki podnožni zidovi ili temelji. Zbog male debljine stijena ukupna je izgrađena površina zgrade s drvenim stijenama za 10···15% manja nego površina zgrade od zidanih stijena.

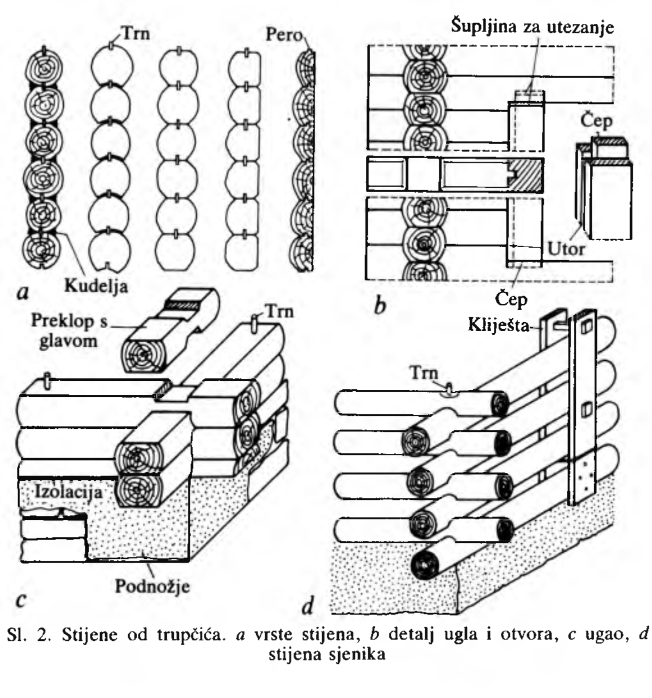
Drvo je osobito prikladan materijal za montažnu gradnju. Tada se svi dijelovi zgrade izrađuju u industrijskim radionicama, neovisno o vremenskim prilikama, zgrada se brzo postavlja, suha je i odmah useljiva.

Dimnjaci se grade od masivna materijala, a drvene stijene moraju biti odijeljene i dobro zaštićene od dimnjaka i dimnjačkih cijevi. Podnožje drvenih stijena treba biti visoko barem 50 cm, ono mora biti od masivna materijala i bez istaka. Ispod drvene stijene postavlja se trajna izolacija od vlage. Najdonji dio drvene stijene izrađuje se od hrastovine ili od drva s mnogo smole i treba da je impregniran nekim zaštitnim sredstvom.

Pune drvene stijene (brvnare). Ima dvije vrste punih drvenih stijena. Jedne se sastoje od vodoravno naslagane i prirubljene drvene građe koja je povezana trnovima ili perima, a druge se sastoje od okomito postavljene povezane građe koja je dolje utorena u prag, a gore u vjenčanicu. Stabilnost se stijena postiže usidrenjem pragova u podnožje i povezivanjem vjenčanice sa stropnom konstrukcijom. Za takve je stijene potrebno razmjerno mnogo drveta, pa se one izvode samo u krajevima gdje ima obilje drveta i gdje postoje teškoće s nabavkom drugih materijala.

Stijene od vodoravne drvene građe (sl. 1). Pri gradnji takvih stijena treba uzimati u obzir slijeganja stijena okomito na smjer rasta zbog sušenja, koja se zbog položaja građe zbrajaju. Ta utezanja sirove građe mogu iznositi i do 4 cm po metru visine stijene, odnosno 10···12 cm po katu zgrade. Zbog toga se moraju svi konstrukcijski dijelovi koji se ne mogu utezati zajedno sa stijenom (okomiti stupovi, doprozornici, dovratnici, dimnjaci, stubišta, obloge i sl.) tako izvesti da ne ometaju utezanje i da ne ovise o njemu. Tako npr. doprozornici i dovratnici moraju imati na gornjoj strani toliko visok slobodni prostor koliko bi moglo iznositi utezanje građe, obloge se na unutrašnjoj strani stijene učvršćuju samo uz gornji ili donji rub i sl. Instalacije se postavljaju nakon što se stijene utegnu.

Sl. 1. Kuća sa stijenama od horizontalne drvene građe



Sl. 2. Stijene od trupčića. *a* vrste stijena, *b* detalj ugla i otvora, *c* ugao, *d* stijena sjenika