Tablica 1
KARAKTERISTIKE NEKIH IZVEDENIH STIRLINGOVIH MOTORA

| | | *Konstrukcija* | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | *Philips A-235* | *MAN-MWM* | *Philips-Ford* | *United Stirling Sweden* | *MAN-MWM* | *British Stirling Engine Consortium* |
| Godina objavljenih podataka | | 1971. | 1973. | 1977. | 1977. | 1977. | 1982. |
| Snaga | kW | 73 147 | 85 | 125 | 75 | 22 | 10···20 |
| Cilindar, *d*/*s* | mm | 77,5/49,8 | | | | | 90/60 |
| Broj cilindara | | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | 1 |
| Volumen cilindara | $cm^3$ | 4 × 234 | 4 × 499 | 4 × 215 | 4 × 189 | 4 × 100 | 381 |
| Brzina vrtnje | $min^{-1}$ | 3000 | 1500 | 4000 | 2400 | 1500 | 1500···3000 |
| Srednji tlak procesa, $p_m$ | MPa | 11,0 22,0 | 9,8 | 20,0 | 15,0 | 12,0 | 15,0 |
| Radni medij | | He | He | $H_2$ | $H_2$ | He | He |
| Temperatura prostora – toplog | K | 973 | 903, plin | 973 | 973 | | 973, cijev<br>873, plin |
| – hladnog | K | 333 | 313, voda | | | | 313, voda<br>358, plin |
| Efektivna korisnost, $\eta_e$ | | 0,3 | | 0,33 | 0,35···0,37 | 0,34 | |
| Efektivni srednji tlak, $p_e$ | MPa | 1,565 | 1,76 | 1,24 | | | 1,05 |
| Izvedba | | Romboidni stapni mehanizam; jednoradan | Romboidni stapni mehanizam; jednoradan | Teturava ploča; dvoradan | Dvoradan | Dvoradan | Jednoradan; dva paralelna cilindra |
| Primjena | | Pogon autobusa sa 31 sjedalom | | | | | |
| Dimenzije motora | m | 1,25 × 0,52 × 1,1 | | | 0,92 × 0,55 × 0,98 | 0,6 × 0,55 × 0,75 | |
| Masa | kg | 760 | | | 350 | | |

može se zaključiti da su oni veći i teži od motora s unutrašnjim izgaranjem jednake snage. Zbog skupe konstrukcije i nedovoljno brze regulacije snage nema, za sada (1989), izgleda da će Stirlingovi motori uskoro zamijeniti motore s unutrašnjim izgaranjem.

Svi su motori navedeni u tabl. 1 eksperimentalni. Oni su izvedeni radi pronalaženja najpovoljnijeg rješenja sa stajališta proizvodnje i pogona. Većina je konstruktora, nakon preuzimanja licencije od Philipsa, započela s jednoradnim motorom i romboidnim stapnim mehanizmom (sl. 4), da bi poslije prešla na dvoradne motore (sl. 5).

Efektivne korisnosti izvedenih Stirlingovih motora nekoliko su puta veće nego u stapnih parnih strojeva, a približno su jednake onima manjih Ottovih motora, ali ne dostižu efektivne korisnosti današnjih velikih Dieselovih motora ($\eta_e = 0{,}42\cdots0{,}50$). Stirlingov motor, međutim, može raditi s bilo kakvim gorivom ili izvorom topline. Osim toga, taj motor svojim radom neposredno ne onečišćuje okoliš, iako se njime ne eliminira onečišćenje okoliša zbog izgaranja goriva potrebnog za pogon motora. To bi u budućnosti moglo utjecati na zamjenu motora s unutrašnjim izgaranjem Stirlingovim motorom. Zbog toga su u toku opsežna istraživanja da bi se pronašla što povoljnija izvedba Stirlingova motora.

**Stirlingov rashladni stroj.** Opisani Stirlingov motor pretvara toplinsku energiju u mehaničku. Ako se, međutim, pokreće energijom dovedenom izvana (npr. električnom energijom), a kut $\varphi$ se izmijeni tako da zbivanja u hladnom prostoru prethode zbivanjima u toplom prostoru, te ako se izvrše još neke preinake, dobiva se rashladni stroj. U njemu se ekspanzijom plina mogu postići tako niske temperature da će se zrak koji oplakuje cijevi zagrijača plina ukapljiti. Tada je u prostoru ekspanzije niža temperatura nego u prostoru kompresije. Za takav se stroj mora upotrijebiti helij ili vodik kao radni medij. Kad se Stirlingov motor upotrebljava kao rashladni stroj, topli se prostor naziva ekspanzijskim prostorom i u njemu je niža temperatura, dok se hladni prostor naziva kompresijskim prostorom i u njemu je viša temperatura.

LIT.: A Passenger Coach Powered by a Philips Stirling Engine. Philips, Eindhoven 1971. – *G. Walker*, Stirling-cycle Machines. Clarendon Press, Oxford 1973. – *Б. В. Сутугина*, Двигатели Стирлинга. Издательство Мир, Москва 1975. – *M. Mikuličić*, Motori I. Školska knjiga, Zagreb 1976. – *J. Kolin*, Isothermal Stirling Cycle Engine. Rudarsko-geološko-naftni fakultet Sveučilišta u Zagrebu, Liber, Zagreb 1983. – *M. Mikuličić, J. Kamenarović*, Termički stupanj djelovanja Stirlingova motora. Tehnički fakultet, Rijeka, Zbornik radova VIII, Rijeka 1985.

*M. Mikuličić*

**STOHASTIČKI PROCESI,** slučajni procesi (prema grčkom στοχαστικός stohastikos *vješt u pogađanju, naslućivanju*), matematičke apstrakcije stvarnih procesa, koji se odvijaju po vjerojatnosnim zakonima. Stoga se teorija stohastičkih procesa može smatrati i dijelom teorije vjerojatnosti koji je povezan s praktičnim primjenama. Na stvaranje i razvitak teorije stohastičkih procesa utjecale su pojave u fizici (Brownovo gibanje), biologiji (procesi razmnožavanja) i posebno u različitim područjima tehničkih znanosti, osobito u elektrotehnici (problemi smetnja u telekomunikacijama, problemi pouzdanosti i dr.).

Teorija stohastičkih procesa, kao samostalna znanstvena disciplina, razvila se u posljednjih pedesetak godina. Fundamentalne doprinose njenu razvitku dali su A. A. Markov, A. N. Kolmogorov, P. Lèvy, J. L. Doob, H. Cramer, W. Feller, N. Wiener i dr.

Danas je teorija stohastičkih procesa veoma razgranata matematička disciplina koja ima veliku primjenu u tehničkim znanostima, gdje se mnoge teorije osnivaju i opisuju upravo pomoću pojava i metoda teorije stohastičkih procesa (*teorija pouzdanosti, teorija repova, teorija informacija, teorija upravljanja* itd.).

**Osnovni pojmovi.** Budući da se pod pojmom stohastičkog procesa razumijeva takav proces koji se događa u određenom vremenskom intervalu i podvrgava se zakonima vjerojatnosti, temeljni će se pojmovi teorije stohastičkih procesa definirati pomoću odgovarajućih pojmova teorije vjerojatnosti (v. *Vjerojatnost*).

Stohastički se proces matematički definira kao familija slučajnih varijabla $\{X_t : t \in T\}$, gdje je $X_t$ stanje procesa u trenutku $t$, a $T$ je neprazni skup trenutaka u kojima se proces promatra. Stanje je procesa u svakom trenutku $t \in T$, dakle, slučajna varijabla kojoj, dakako, pripada određena distribucija vjerojatnosti. Ako je $T$ konačan skup, onda se radi o konačno dimenzionalnom slučajnom vektoru, što se obično ne razmatra u teoriji stohastičkih procesa, jer je za tu teoriju karakteristično da je $T$ (*parametarski skup*) beskonačan skup. Kada se radi o prebrojivom parametarskom skupu, govori se o nizu slučajnih varijabla ili o *slučajnom nizu* $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ Slučajni se niz naziva još i *stohastički proces s diskretnim parametrom*.

Ako je $T$ interval realnih brojeva, najčešće $T = [0, \infty)$ ili $T = (-\infty, \infty) = \mathbf{R}$, tada se govori o slučajnoj funkciji $t \to X_t$, $t \in T$, ili o *stohastičkom procesu s kontinuiranim parametrom.*

U određenom stohastičkom procesu promatraju se slučajni događaji koji se nazivaju *realizacije* (*trajektorije*) procesa. Tada slučajne varijable $X_t$ poprimaju pripadne brojčane vrijednosti $x_t (t \in T)$. Tako se u slučajnom nizu $X_1, X_2, \ldots$ kao realizacija pojavljuje niz realnih brojeva $x_1, x_2, \ldots$, dok se u slučajnoj funkciji $t \to X_t$ kao realizacija (trajektorija) pojavljuje realna funkcija $t \to x_t = x(t)$, $t \in T$.

Slučajne varijable i slučajni vektori karakteriziraju se u vjerojatnosnom smislu pripadnim razdiobama vjerojatnosti. Za vjerojatnosnu karakterizaciju stohastičkog procesa treba zadati sve moguće konačno dimenzionalne razdiobe vjerojatnosti, tj. za svaki prirodni broj $n$ i svaki mogući izbor $t_1 \ldots, t_n \in T$ mora biti poznata funkcija razdiobe slučajnog vektora $(X_{t_1}, \ldots, X_{t_n})$.

Tako je, npr., za $n = 1$, $F(x,t) = \mathrm{P}(X_t \leqq x)$, $x \in \mathbf{R}$, funkcija razdiobe prvog reda stohastičkog procesa $\{X_t : t \in T\}$. Za $n = 2$ dobiva se $F(x_1, x_2, t_1, t_2) = \mathrm{P}(X_{t_1} \leqq x_1, X_{t_2} \leqq x_2)$, $x_1, x_2 \in \mathbf{R}$, funkcija razdiobe drugog reda itd. Za svako $n \geqq 2$ u pripadnoj funkciji razdiobe $n$-tog reda sadržana je pripadna stohastička zavisnost između slučajnih varijabla u promatranom stohastičkom procesu $\{X_t : t \in T\}$. Na temelju svojstava te zavisnosti klasificiraju se stohastički procesi. Tako se, npr., promatraju *procesi s nezavisnim prirastima, Markovljevi procesi, stacionarni procesi* itd.

Poznavanje funkcije razdiobe prvog reda omogućuje definiranje funkcije $t \to \mathrm{E}[X_t] = m_X(t)$, $t \in T$, koja se naziva *očekivanje stohastičkog procesa* $\{X_t : t \in T\}$, i funkcije $t \to \mathrm{D}[X_t] = s_X^2(t)$, koja se naziva *disperzija procesa.*

Poznavanje funkcije razdiobe drugog reda omogućuje definiranje funkcije

$$(t_1, t_2) \to \mathrm{E}[(X_{t_1} - \mathrm{E}[X_{t_1}])(X_{t_2} - \mathrm{E}[X_{t_2}])] = R_X(t_1, t_2), \qquad t_1, t_2 \in \mathbf{R}, \tag{1}$$

koja se naziva *autokorelacijska funkcija* stohastičkog procesa $\{X_t : t \in T\}$. Očigledno je $R_X(t,t) = s_X^2(t)$. Autokorelacijska funkcija ima ova svojstva:

$$R_x(t_1, t_2) = R_X(t_2, t_1) \text{ (tj. } \textit{simetričnost}\text{)}, \tag{2}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_i a_j R_X(t_i, t_j) \geqq 0 \tag{3}$$

za svaki prirodni broj $n$, svaki izbor $t_1, \ldots, t_n \in T$ i svaki izbor realnih brojeva $a_1, \ldots, a_n$ (tj. *pozitivna semidefinitnost*);

$$|R_X(t_1, t_2)|^2 \leqq s_X^2(t_1)\, s_X^2(t_2) \text{ (tj. } \textit{ograničenost}\text{)}. \tag{4}$$

Ako je $Y_t = X_t + h(t)$, gdje je $t \to h(t)$, $t \in T$, realna funkcija, onda je $\{Y_t : t \in T\}$ stohastički proces kojemu pripada očekivanje $m_Y(t) = m_X(t) + h(t)$ i autokorelacijska funkcija $R_Y(t_1, t_2) = R_X(t_1, t_2)$.

Ako je $Y_t = h(t) X_t$, tada je $\{Y_t : t \in T\}$ stohastički proces kojemu pripada očekivanje $m_Y(t) = h(t) m_X(t)$ i autokorelacijska funkcija $R_Y(t_1, t_2) = h(t_1) h(t_2) R_X(t_1, t_2)$.

Ako je $s_X(t) > 0$, onda se funkcija

$$(t_1, t_2) \to \frac{R_X(t_1, t_2)}{s_X(t_1) s_X(t_2)} = r_X(t_1, t_2) \tag{5}$$

naziva *normirana autokorelacijska funkcija* stohastičkog procesa $\{X_t : t \in T\}$. Očigledno je

$$r_X(t_1, t_2) = r_X(t_2, t_1), \; r_X(t,t) = 1, \; |r_X(t_1, t_2)| \leqq 1, \tag{6}$$

a broj $r_X(t_1, t_2)$ označava *koeficijent korelacije* između slučajnih varijabla $X_{t_1}$ i $X_{t_2}$.

Ako su $\{X_t : t \in T\}$ i $\{Y_t : t \in T\}$ dva stohastička procesa sa zajedničkim parametarskim skupom $T$, onda je $\{Z_t : t \in T\}$, gdje je $Z_t = X_t + Y_t$, stohastički proces koji se naziva *zbroj zadanih procesa.* Vrijedi:

$$m_Z(t) = m_X(t) + m_Y(t), \tag{7}$$

$$R_Z(t_1, t_2) = R_X(t_1, t_2) + R_Y(t_1, t_2) + R_{XY}(t_1, t_2) + R_{XY}(t_2, t_1), \tag{8}$$

gdje je

$$R_{XY}(t_1, t_2) = \mathrm{E}[(X_{t_1} - \mathrm{E}[X_{t_1}])(Y_{t_2} - \mathrm{E}[Y_{t_2}])]. \tag{9}$$

Funkcija $(t_1, t_2) \to R_{XY}(t_1, t_2)$ naziva se *uzajamna korelacijska funkcija* procesa $\{X_t : t \in T\}$ i $\{Y_t : t \in T\}$. Tada vrijedi da je

$$R_{XY}(t_1, t_2) = R_{YX}(t_2, t_1). \tag{10}$$

Ako je $R_{XY}(t_1, t_2) = 0$, za sve $t_1, t_2 \in T$ kaže se da su $\{X_t : t \in T\}$ i $\{Y_t : t \in T\}$ *nekorelirani procesi.*

Proučavanje stohastičkih procesa preko autokorelacijske funkcije općenito je povezano s velikim teškoćama. Stoga su razvijene metode kojima se složeni procesi mogu aproksimirati manje složenim procesima.

Ako su $A_i$ $(i = 1, \ldots, n)$ nekorelirane slučajne varijable s očekivanjima $\mathrm{E}[A_i] = 0$ i disperzijama $\mathrm{D}[A_i] = s_i^2$, $t \to u_i(t)$, $t \in T$, zadane realne funkcije i ako je

$$X_t = m_X(t) + \sum_{i=1}^{n} A_i u_i(t), \tag{11}$$

kaže se da je proces $\{X_t : t \in T\}$ zadan *kanonskim prikazom* s *baznim funkcijama* $u_i$ i *koeficijentima* $A_i$. Proces je rastavljen na neslučajni dio $m_X(t)$ i slučajni dio $\sum_{i=1}^{n} A_i u_i(t)$ koji je karakteriziran konačnim brojem slučajnih varijabla (koeficijenata $A_i$). Pripadna je autokorelacijska funkcija

$$R_X(t_1, t_2) = \sum_{i=1}^{n} u_i(t_1) u_i(t_2) s_i^2, \tag{12}$$

dok je disperzija toga procesa

$$s_X^2(t) = \sum_{i=1}^{n} u_i^2(t) s_i^2. \tag{13}$$

Glavni je problem u vezi s kanonskim prikazom (11) nekog stohastičkog procesa određivanje uvjeta uz koje se proces može prikazati u kanonskom obliku, pri čemu se dopušta i $n = \infty$. S tim je u vezi *Karhunen-Loèveov teorem* u kojem su navedeni uvjeti egzistencije kanonskog prikaza i formalne veze između autokorelacijske funkcije procesa, baznih funkcija i pripadnih koeficijenata. Te su veze vrlo složene, tako da ih je rijetko moguće izraziti analitički.

**Markovljevi lanci.** Matematički model za opisivanje takvih realnih slučajnih procesa u kojima je statističko ponašanje procesa u budućnosti potpuno određeno stanjem procesa u sadašnjosti i ne ovisi o ponašanju procesa u prošlosti naziva se *Markovljev proces.* Ako se radi o procesu koji se odvija korak po korak i koji može poprimiti samo konačni broj stanja, onda je to *konačni Markovljev lanac.* Formalno govoreći, konačni je Markovljev lanac stohastički proces $\{X_t : t \in T\}$, gdje je $T = \{0, 1, 2, \ldots\}$, a $X_t$ diskretna slučajna varijabla sa skupom vrijednosti $S = \{a_1, \ldots, a_r\}$ $(r \in \mathbf{N})$. Tada za svaki izbor $x_1, \ldots, x_n \in S$ $(n \geqq 2)$ vrijedi da je

$$\mathrm{P}(X_n = x_n / (X_{n-1} = x_{n-1}, \ldots, X_0 = x_0)) = \mathrm{P}(X_n = x_n / X_{n-1} = x_{n-1}). \tag{14}$$

Relacijom (14) iskazuje se tzv. *Markovljevo svojstvo* da vjerojatnost dolaska procesa u stanje $x_n$ u trenutku $t = n$ ne ovisi o evoluciji procesa $x_0, x_1, \ldots, x_{n-2}$ do trenutka $t = n-1$, već samo o stanju $x_{n-1}$ procesa u trenutku $t = n-1$.

Skup $S$ naziva se *skup stanjâ* procesa, a uvjetne se vjerojatnosti

$$P(X_n = a_j / X_{n-1} = a_i) = p_{ij}(n), \quad i,j = 1,\ldots,r, \quad n = 1,2,\ldots \tag{15}$$

nazivaju *prijelazne vjerojatnosti* iz stanja $a_i$ u stanje $a_j$ u $n$-tom koraku. Ako se uvede oznaka $p_j(n) = P(X_n = a_j)$, $j = 1,\ldots,r$, $n = 0,1,2,\ldots$, gdje $p_j(n)$ označava vjerojatnost da proces dođe u stanje $a_j$ u trenutku $t = n$, onda vrijedi

$$p_j(n) = \sum_{i=1}^{r} p_i(n-1) p_{ij}(n), \quad j = 1,\ldots,r, \quad n = 1,2,\ldots \tag{16}$$

Sustav jednadžbi (16) u matričnom obliku glasi

$$\boldsymbol{p}(n) = \boldsymbol{p}(n-1)\Pi(n), \quad n = 1,2,\ldots, \tag{17}$$

gdje je $\boldsymbol{p}(n)$ jednoredna matrica $[p_1(n),\ldots,p_r(n)]$, dok je $\Pi(n)$ kvadratna matrica $r$-tog reda s elementima $p_{ij}(n)$ i ona se naziva *matrica prijelaznih vjerojatnosti u n-tom koraku.*
Iz (17) se vidi da vrijedi

$$\boldsymbol{p}(n) = \boldsymbol{p}(0)\,\Pi(1)\cdot\ldots\cdot\Pi(n), \tag{18}$$

gdje je $\boldsymbol{p}(0)$ *vektor početnih vjerojatnosti* stanja. Ako je $\Pi(1) = \Pi(2) = \ldots = \Pi$, što znači da matrica prijelaznih vjerojatnosti ne ovisi o promatranom trenutku (koraku), onda je to *homogeni Markovljev lanac.* Tada (18) postaje

$$\boldsymbol{p}(n) = \boldsymbol{p}(0)\,\Pi^n, \quad n = 1,2,\ldots, \tag{19}$$

pa se vidi da se vjerojatnosti stanja u trenutku $t = n$ izražavaju pomoću početnih vjerojatnosti stanja i prijelaznih vjerojatnosti. Matrica $\Pi$ pripada klasi tzv. *stohastičkih matrica* koje su karakterizirane uvjetima:

$$p_{ij} \geqq 0, \quad i,j = 1,\ldots,r \text{ i } \sum_{j=1}^{n} p_{ij} = 1. \tag{20}$$

Matrica $\Pi^n$ također je stohastička matrica i njen element $p_{ij}^{(n)}$ *označava vjerojatnost prijelaza procesa iz stanja* $a_i$ u stanje $a_j$ za $n$ koraka, pa se naziva *matrica prijelaznih vjerojatnosti za n koraka.* Jednadžba

$$\Pi^{m+n} = \Pi^m \Pi^n \ (m,n \in \mathbf{N}) \tag{21}$$

izriče da je matrica prijelaznih vjerojatnosti za $m+n$ koraka jednaka produktu matrice prijelaznih vjerojatnosti za $m$ i matrice prijelaznih vjerojatnosti za $n$ koraka.

Posebno zanimljiva svojstva imaju tzv. *regularni* (*ergodički*) Markovljevi lanci. Ta su svojstva:

*a*) postoji $\lim\limits_{n\to\infty} \boldsymbol{p}(n) = \boldsymbol{p}(\infty) = [p_1(\infty),\ldots,p_r(\infty)]$, a $\boldsymbol{p}(\infty)$ se naziva *vektor graničnih vjerojatnosti* stanja. Vjerojatnost $p_j(\infty) = q_j \geqq 0 \left(\sum\limits_{j=1}^{r} q_j = 1\right)$ može se interpretirati kao vjerojatnost da proces dospije u stanje $a_j$ u nekom dalekom trenutku $(t = \infty)$;

*b*) postoji $\lim\limits_{n\to\infty} \Pi^n = \boldsymbol{Q}$, gdje je $\boldsymbol{Q}$ stohastička matrica u kojoj su svi reci identični s $\boldsymbol{p}(\infty) = \boldsymbol{q}$;

*c*) matrična jednadžba $\boldsymbol{p}\,\Pi = \boldsymbol{p}$, gdje je $\boldsymbol{p} = [p_1,\ldots,p_r]$, $p_j \geqq 0$, $\sum\limits_{j=1}^{r} p_j = 1$, ima jedinstveno rješenje $\boldsymbol{p} = \boldsymbol{q}$ i ono se naziva *vektor stacionarnih vjerojatnosti* stanja.

Ako se vektor stacionarnih vjerojatnosti stanja ($\boldsymbol{q}$) uzme kao vektor početnih vjerojatnosti stanja ($\boldsymbol{p}(0) = \boldsymbol{q}$), onda je $\boldsymbol{p}(n) = \boldsymbol{p}(0) = \boldsymbol{q}$, tj. razdioba vjerojatnosti slučajne varijable $X_n$ ista je u svakom momentu $t = n\ (n = 0,1,2,\ldots)$.

**Markovljevi procesi s kontinuiranim parametrom.** Za matematičko modeliranje mnogih stvarnih procesa često se upotrebljavaju Markovljevi procesi s kontinuiranim parametrom. Najčešće se uzima $T = [0,\infty)$, gdje $t \in T$ ima značenje vremenskog trenutka, a $X_t$ je diskretna slučajna varijabla sa skupom vrijednosti $S = \{a_1, a_2, \ldots\}$. Stohastički proces $\{X_t : t \in T\}$ tada je Markovljev proces ako za svaki prirodni broj $n \geqq 3$, za svaki izbor vremenskih trenutaka $t_1 < t_2 < \ldots < t_n$ i za svaki izbor $x_1, x_2, \ldots, x_n$ stanja procesa iz skupa $S$ vrijedi Markovljevo svojstvo, tj. da je

$$\begin{aligned} P(X_{t_n} = x_n / (X_{t_{n-1}} = x_{n-1}, \ldots, X_{t_1} = x_1)) &= \\ = P(X_{t_n} = x_n / X_{t_{n-1}} = x_{n-1}), \end{aligned} \tag{22}$$

kojim se, dakako, izriče da *budućnost procesa* ne ovisi o *prošlosti,* već samo o *sadašnjem* stanju procesa.

Ako još vrijedi da prijelazne vjerojatnosti $P(X_{t_n} = x_n / X_{t_{n-1}} = x_{n-1})$ ne ovise pojedinačno o $t_n$ i $t_{n-1}$, već samo o njihovoj razlici $t_n - t_{n-1} = t$, tako da se može napisati da je

$$P(X_{\tau+t} = a_j / X_\tau = a_i) = p_{ij}(t), \quad i,j = 1,2,\ldots, \quad \tau \geqq 0,\ t \geqq 0, \tag{23}$$

onda se proces $\{X_t : t \in T\}$ naziva *homogeni Markovljev proces.*

Matrica $\Pi(t)$, s elementima $p_{ij}(t)$, koja može biti i beskonačna matrica, naziva se *matrica prijelaznih vjerojatnosti.* Tu se, zapravo, radi o matričnoj funkciji $t \to \Pi(t)$, $t \in T$, s ovim svojstvima:

$$0 \leqq p_{ij}(t) \leqq 1, \ i,j = 1,2,\ldots, \quad t \geqq 0, \tag{24}$$

$$\sum_j p_{ij}(t) = 1, \quad t \geqq 0, \quad i = 1,2,\ldots, \tag{25}$$

$$\Pi(0) = \boldsymbol{I} \ (\boldsymbol{I} \text{ je jedinična matrica}), \tag{26}$$

$$\Pi(t+u) = \Pi(t)\,\Pi(u), \quad t \geqq 0, \quad u \geqq 0 \tag{27}$$

(To je *Chapman-Kolmogorovljeva jednadžba*).

Ako je $\boldsymbol{p}(0) = [p_1(0), p_2(0), \ldots]$ *vektor početnih vjerojatnosti stanja,* tj. $p_j(0) = P(X_0 = a_j)$ i $\boldsymbol{p}(t) = [p_1(t), p_2(t), \ldots]$ *vektor vjerojatnosti stanja u trenutku* $t > 0$, onda vrijedi

$$\boldsymbol{p}(t) = \boldsymbol{p}(0)\ \Pi(t), \quad t \geqq 0. \tag{28}$$

Uz pretpostavku da su funkcije $t \to p_{ij}(t)$ neprekidne, mogu se definirati desne derivacije u $t = 0$, pa ako se stavi da je

$$\lambda_{ij} = \frac{\mathrm{d}p_{ij}(0)}{\mathrm{d}t}, \quad i,j = 1,2,\ldots, \tag{29}$$

onda je $\lambda_{ij} \geqq 0$, za $i \neq j$, $\lambda_{ii} \leqq 0$ i $\sum\limits_j \lambda_{ij} = 0$. Matrica $\Lambda$ s elementima $\lambda_{ij}$ naziva se *infinitezimalna matrica* zadanog homogenog Markovljeva procesa.

Veza između matrice $\Pi(t)$ prijelaznih vjerojatnosti i infinitezimalne matrice $\Lambda$ dana je matričnom diferencijalnom jednadžbom

$$\Pi'(t) = \Pi(t)\Lambda, \tag{30}$$

gdje je $\Pi'(t)$ matrica kojoj su elementi derivacije $p'_{ij}(t)$ prijelaznih vjerojatnosti $p_{ij}(t)$. Ako je, dakle, poznata infinitezimalna matrica $\Lambda$, onda se matrična diferencijalna jednadžba (30) može riješiti uz početni uvjet $\Pi(0) = \mathbf{I}$. Rješenje se formalno može zapisati u obliku

$$\Pi(t) = \exp(t\Lambda), \quad t \geqq 0. \tag{31}$$

Postoje, međutim, velike teškoće da se matrica $\exp(t\Lambda)$ odredi u eksplicitnom obliku, tako da u iole važnijim primjenama nema praktične koristi od jednadžbe (31).

Zato se nastoji proučiti asimptotsko $(t \to \infty)$ ponašanje procesa. Ako postoji $\lim\limits_{t\to\infty} p_{ij}(t) = q_j \geqq 0$ i $\sum\limits_i q_j = 1$, onda se $\boldsymbol{q} = [q_1, q_2, \ldots]$ može interpretirati kao *vektor graničnih vjerojatnosti* stanja. Čini se, naime, prirodnim da za dugi interval vremena $t$ vjerojatnost da proces dođe u stanje $a_j$ na kraju intervala ne ovisi o tome u kojem je stanju $a_i$ bio proces na početku intervala. Zato se $q_j$ naziva još i *stacionarna vjerojatnost* stanja $a_j (j = 1,2,\ldots)$. Stacionarne vjerojatnosti stanja određuju se iz sustava linearnih jednadžbi:

$$\sum_j \lambda_{ij} q_j = 0, \quad i = 1,2,\ldots \tag{32}$$

$$\sum_j q_j = 1. \tag{33}$$

Da bi se dobila praktična interpretacija veličina $\lambda_{ij}$, promatra se vrijeme $Z_i$ boravka procesa u stanju $a_i$. Pokazuje se da je

$Z_i$ slučajna varijabla *eksponencijalne razdiobe* parametra $-\lambda_{ii}=\lambda_i \geqq 0$, tako da je $E[Z_i]=1/\lambda_i$ srednje vrijeme boravka procesa u stanju $a_i$. Ako je $0<\lambda_i<\infty$, stanje $a_i$ naziva se *stabilno stanje.* Ako je $\lambda_i=0$, stanje $a_i$ naziva se *apsorbirajuće stanje,* jer je tada $E[Z_i]=\infty$, što znači da proces kad dospije u apsorbirajuće stanje ostaje trajno u njemu. Ako je $\lambda_i=\infty$, onda je $E[Z_i]=0$ i stanje se $a_i$ naziva *trenutno stanje,* jer proces može dospjeti u trenutno stanje, ali ga odmah i napušta.

Promotre li se za neko stanje $a_i$ koje nije apsorbirajuće ($\lambda_i \neq 0$) veličine $\lambda_{ij}/\lambda_i$ ($j=1,2,\ldots,j\neq i$), vidi se da je $\lambda_{ij}/\lambda_i \geqq 0$ i $\sum_{j(j\neq i)} \lambda_{ij}/\lambda_i=1$, tako da se $\lambda_{ij}/\lambda_i$ može smatrati uvjetnom vjerojatnosti da proces prijeđe iz stanja $a_i$ u stanje $a_j$ ako se zna da je nastupila promjena stanja. Veličina $\lambda_{ij}$ može se, prema tome, smatrati intenzitetom prijelaza iz stanja $a_i$ u stanje $a_j$.

**Procesi rađanja i umiranja.** Posebna su vrsta homogenih Markovljevih procesa tzv. *procesi rađanja i umiranja,* koje karakterizira pripadni skup stanja $S=\{0,1,2,\ldots\}$ i infinitezimalna matrica koja ima oblik

$$\Lambda=\begin{bmatrix} -\lambda_0 & \lambda_0 & 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot \\ \mu_1 & -(\lambda_1+\mu_1) & \lambda_1 & 0 & 0 & \cdot & \cdot \\ 0 & \mu_2 & -(\lambda_2+\mu_2) & \lambda_2 & 0 & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \mu_3 & -(\lambda_3+\mu_3) & \lambda_3 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix} \tag{34}$$

U procesu rađanja i umiranja $\{X_t: t\in T\}$ slučajna varijabla $X_t$ obično se interpretira kao *brojno stanje populacije* u trenutku $t$. Broj $\lambda_i>0$ ($i=0,1,2,\ldots$) naziva se *intenzitet rađanja* u stanju $i$, a broj $\mu_j>0$ ($j=1,2,3,\ldots$) *intenzitet umiranja* u stanju $j$.

Ako red

$$1+\frac{\lambda_0}{\mu_1}+\frac{\lambda_0\lambda_1}{\mu_1\mu_2}+\frac{\lambda_0\lambda_1\lambda_2}{\mu_1\mu_2\mu_3}+\ldots \tag{35}$$

konvergira i ima sumu $s$, onda postoje stacionarne vjerojatnosti te vrijedi da je

$$q_0=\frac{1}{s},\quad q_j=\frac{\lambda_0\cdot\lambda_1\cdot\ldots\cdot\lambda_{j-1}}{\mu_1\cdot\mu_2\cdot\ldots\cdot\mu_j}q_0,\qquad j=1,2,\ldots \tag{36}$$

Proces rađanja i umiranja može imati i konačno mnogo stanja, tj. $S=\{0,1,\ldots,n\}$ ($n\in\mathbf{N}$), i tada pripadna konačna infinitezimalna matrica ima oblik

$$V=\begin{bmatrix} -\lambda_0 & \lambda_0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & 0 \\ \mu_1 & -(\lambda_1+\mu_1) & \lambda_1 & 0 & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & \mu_2 & -(\lambda_2+\mu_2) & \lambda_2 & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & 0 & \cdot & \cdot & \mu_{n-1} & -(\lambda_{n-1}+\mu_{n-1}) & \lambda_{n-1} \\ 0 & 0 & \cdot & \cdot & 0 & \mu_n & -\mu_n \end{bmatrix} \tag{37}$$

Tada je $s$ konačna suma koja iznosi

$$s=1+\frac{\lambda_0}{\mu_1}+\frac{\lambda_0\lambda_1}{\mu_1\mu_2}+\ldots+\frac{\lambda_0\lambda_1\cdot\ldots\cdot\lambda_{n-1}}{\mu_1\mu_2\cdot\ldots\cdot\mu_n}, \tag{38}$$

a pripadne su stacionarne vjerojatnosti stanja

$$q_0=\frac{1}{s},\quad q_j=\frac{\lambda_0\lambda_1\cdot\ldots\cdot\lambda_{n-1}}{\mu_1\mu_2\cdot\ldots\cdot\mu_n}q_0,\qquad j=1,\ldots,n. \tag{39}$$

Poseban slučaj procesa rađanja i umiranja s beskonačnim skupom stanja jest tzv. *Poissonov proces* u kojem je $\lambda_i=\lambda$ ($i=0,1,\ldots$) i $\mu_j=0$ ($j=1,2,\ldots$). U Poissonovu procesu moguća su, dakle, samo rađanja, a intenzitet je rađanja konstantan ($\lambda$). Ako Poissonov proces započinje od nule, tj. ako je $P(X_0=0)=1$, onda je

$$P(X_t=k)=\frac{(\lambda t)^k}{k!}\exp(-\lambda t),\qquad t>0,\qquad k\in S, \tag{40}$$

što znači da je stanje procesa $X_t$ u trenutku $t>0$ slučajna varijabla Poissonove razdiobe parametra $\lambda t$. Očekivanje je Poissonova procesa funkcija

$$m(t)=\lambda t,\qquad t\geqq 0, \tag{41}$$

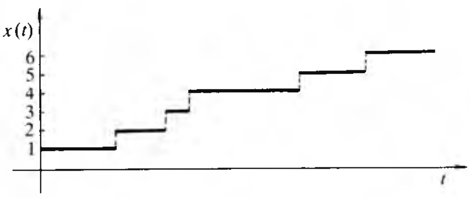
dok je autokorelacijska funkcija

$$R(t+u,t)=\lambda t,\qquad t\geqq 0,\qquad u\geqq 0, \tag{42}$$

iz čega proizlazi da je disperzija procesa funkcija $s^2(t)=\lambda t$. Za Poissonov proces nadalje vrijedi

$$P(X_{t+u}-X_t=k)=\frac{(\lambda u)^k}{k!}\exp(-\lambda u),$$
$$t\geqq 0,\qquad u>0,\qquad k\in S, \tag{43}$$

što znači da je broj rođenih u vremenskom intervalu $[t,t+u]$ slučajna varijabla Poissonove razdiobe parametra $\lambda u$, tj. da ne ovisi o položaju ($t$) intervala na vremenskoj osi, već samo o njegovoj duljini ($u$). Vrijeme $Z$ između dva uzastopna rađanja slučajna je varijabla eksponencijalne razdiobe parametra $\lambda$. Na temelju toga može se zaključiti da se Poissonov proces odvija (sl. 1) ovako: najprije proces boravi slučajno vrijeme $Z$ u stanju 0, zatim dospijeva u stanje 1, gdje opet boravi slučajno vrijeme $Z$, nakon toga dospijeva u stanje 2 itd.



Sl. 1. Tipična trajektorija Poissonova procesa

U praktičnim je primjerima $X_t$ obično broj pojavljivanja nekog slučajnog događaja u vremenskom intervalu $[0,t)$ (broj poziva telefonskoj centrali, broj kvarova nekog stroja i sl.).

Specijalni se procesi rađanja i umiranja pojavljuju u *teoriji repova*, tj. pri matematičkom modeliranju procesa čekanja i usluživanja (sl. 2). Pretpostavlja se da u sustavu usluživanja, koji se sastoji od $r$ ($r\in\mathbf{N}$) istovrsnih kanala usluživanja, dolaze klijenti tako da je vremenski interval između dolaska $i$-tog i $(i+1)$-og klijenta slučajna varijabla $U_i$ eksponencijalne razdiobe parametra $\lambda$ ($\lambda>0$) i da su $U_1,U_2,\ldots$ nezavisne slučajne varijable. Također se pretpostavlja da je vrijeme usluživanja $V_{ij}$ $i$-tog klijenta na $j$-tom kanalu slučajna varijabla eksponencijalne razdiobe parametra $\mu$ ($\mu>0$) i da su $V_{ij}$ ($i=1,2,\ldots,\ j=1,\ldots,r$) nezavisne slučajne varijable. Pretpostavlja se još i nezavisnost slučajnih varijabla $U_i$ i $V_{ij}$.

Ako postoji slobodan kanal, upravo pristigli klijent odmah se uslužuje, a ako su svi kanali zauzeti, formira se *rep.* Kada se oslobodi neki od kanala, uslužuje se klijent iz repa prema pravilu *prije došao – prije uslužen.* Broj klijenata u sustavu (u repu i na usluživanju) u nekom trenutku $t$ slučajna je varijabla $X_t$, pa se može promatrati stohastički proces $\{X_t: t\in T\}$, $T=[0,\infty)$. Kad duljina repa nije ograničena, proces $\{X_t: t\in T\}$ biva proces rađanja i umiranja s beskonačnom infinitezimalnom matricom oblika

$$V=\begin{bmatrix} -\lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 & \cdot & 0 & \cdot \\ \mu & -(\lambda+\mu) & \lambda & 0 & 0 & \cdot & 0 & \cdot \\ 0 & 2\mu & -(\lambda+2\mu) & \lambda & 0 & \cdot & 0 & \cdot \\ 0 & 0 & 3\mu & -(\lambda+3\mu) & \lambda & \cdot & 0 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & r\mu & -(\lambda+r\mu) & \lambda & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix} \tag{44}$$

Ako se stavi da je $\varrho=\lambda/\mu$ i ako je $\lambda<r\mu$, dobiva se red

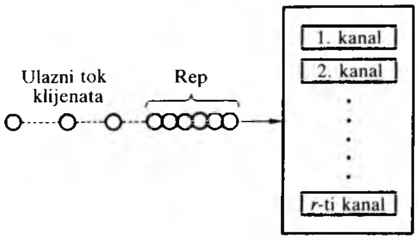
$$1+\varrho+\frac{\varrho^2}{2!}+\frac{\varrho^3}{3!}+\ldots+\frac{\varrho^r}{r!}+\frac{\varrho^r}{r!}\sum_{i=1}^{\infty}\left(\frac{\varrho}{r}\right)^i \tag{45}$$

koji konvergira i neka ima sumu $s$. Tada su stacionarne vjerojatnosti stanja:

$$q_j = \frac{\varrho^j}{j!\,s}, \quad j = 0, 1, \ldots, r-1, \tag{46}$$

$$q_j = \frac{\varrho^j}{r!\,r^{j-r}s}, \quad j = r, r+1, \ldots \tag{47}$$

Za $r = 1$ govori se o *jednokanalnom sustavu* i tada je $s = 1/(1-\varrho)$ i $q_j = \varrho^j(1-\varrho)$, $j = 0, 1, 2, \ldots$




Sl. 2. Shematski prikaz sustava čekanja i usluživanja

Ako se *ograniči duljina repa* tako da se u repu može naći najviše $k$ ($k \geqq 0$) klijenata, onda se radi o procesu rađanja i umiranja s konačnom infinitezimalnom matricom, a umjesto beskonačnog reda dobiva se konačna suma

$$s = \sum_{i=0}^{r} \frac{\varrho^i}{i!} + \frac{\varrho^r}{r!} \sum_{i=1}^{k} \left(\frac{\varrho}{r}\right)^i. \tag{48}$$

Formule za stacionarne vjerojatnosti stanja iste su kao i kad je rep neograničen, samo što indeks $j$ ide do $r + k$.

Ako je $k = 0$, govori se o *sustavu s otkazima* i tada je

$$q_j = \frac{\varrho^j}{j!\,s}, \quad j = 0, 1, \ldots, r \quad (\textit{Erlangova formula}). \tag{49}$$

**Stacionarni procesi.** Pojednostavnjeno govoreći, stacionarni su stohastički procesi oni u kojima statističke karakteristike slučajnih varijabla ne reagiraju na vremensku translaciju. Formalna definicija glasi: Stohastički je proces $\{X_t : t \in T\}$ *stacionaran u užem smislu,* ili, kraće, samo *stacionaran,* ako za svaki prirodni broj $n$, svaki mogući izbor $t_1, \ldots, t_n \in T$ i za svako $\tau$ za koje je $t_1 + \tau, \ldots, t_n + \tau \in T$, slučajni vektori $(X_{t_1}, \ldots, X_{t_n})$ i $(X_{t_1+\tau}, \ldots, X_{t_n+\tau})$ imaju identične razdiobe vjerojatnosti. Stacionarni proces, očigledno, ima konstantno očekivanje $\mathrm{E}[X_t] = m_0$ i konstantnu disperziju $\mathrm{D}[X_t] = s_0^2$, dok autokorelacijska funkcija $(t_1, t_2) \to R(t_1, t_2)$ ovisi samo o razlici $t_2 - t_1 = \tau$, a ne ovisi pojedinačno o $t_1$ i $t_2$. Stacionarnost, dakako, implicira još i dalja svojstva procesa koja se tiču pojmova povezanih s vjerojatnosnim razdiobama reda većeg od dva.

Ako se, međutim, postavi zahtjev da stohastički proces $\{X_t : t \in T\}$ ima konstantno očekivanje $m_0$ i autokorelacijsku funkciju koja ovisi samo o razlici $\tau = t_2 - t_1$, te ako vrijedi da je

$$R(t_1, t_2) = A(\tau), \quad \tau \in \mathbf{R}, \tag{50}$$

onda se kaže da je proces *stacionaran u širem smislu,* ili da je *stacionaran drugog reda.* Njegova je disperzija $\mathrm{D}[X_t] = A(0) = s_0^2$.

Svaki je stacionarni proces stacionaran i u širem smislu, dok obrat općenito ne vrijedi.

*Gaussov proces* primjer je stohastičkog procesa u kojem se pojam stacionarnosti u užem i širem smislu podudaraju. *Stohastički proces* $\{X_t : t \in T\}$ naziva se Gaussovim ako za svaki prirodni broj $n$ i svaki izbor $t_1, \ldots, t_n \in T$ vrijedi da je $(X_{t_1}, \ldots, X_{t_n})$ slučajni vektor distribuiran po *n-dimenzionalnoj normalnoj razdiobi.* Stacionarni Gaussov proces potpuno karakterizira pripadno očekivanje $m_0$ i pripadna autokorelacijska funkcija $\tau \to A(\tau)$.

U teoriji procesa stacionarnih u širem smislu jedno je od glavnih pitanja što se može reći o svojstvu procesa na temelju poznavanja pripadne autokorelacijske funkcije. Sama definicija stacionarnosti, naime, pokazuje da postoje određene periodične pojave pri odvijanju takvih procesa.

Ako je, npr., $X_t = \cos(\lambda t + \varphi)$, gdje je $\lambda$ (kružna frekvencija) konstanta, a $\varphi$ (faza) slučajna varijabla *uniformne razdiobe* nad segmentom $[0, 2\pi]$, onda je proces $\{X_t : t \in \mathbf{R}\}$ stacionaran u širem smislu, s očekivanjem $\mathrm{E}[X_t] = 0$ i autokorelacijskom funkcijom $A(\tau) = (1/2)\cos\lambda T$. Njegova je disperzija $\mathrm{D}[X_t] = A(0) = 1/2$. Taj se proces može interpretirati kao *oscilacije sa slučajnom fazom.* Autokorelacijska je funkcija periodična, a također i normirana autokorelacijska funkcija $a(\tau) = A(\tau)/A(0) = \cos\lambda\tau$, pa se vidi da se ekstremna koreliranost (1 ili $-1$) pojavljuje između stanja procesa u vremenskim razmacima $k\pi/\lambda$, $k = 1, 2, \ldots$

Ako je

$$X_t = \sum_{k=1}^{n} (U_k \cos\lambda_k t + V_k \sin\lambda_k t), \tag{51}$$

gdje su $\lambda_k$ konstantne kružne frekvencije, a $U_k$ i $V_k$ ($k = 1, \ldots, n$) nekorelirane slučajne varijable s $\mathrm{E}[U_k] = \mathrm{E}[V_k] = 0$ i $\mathrm{D}[U_k] = \mathrm{D}[V_k] = d_k^2 > 0$, onda je proces $\{X_t : t \in \mathbf{R}\}$ stacionaran u širem smislu, s očekivanjem $\mathrm{E}[X_t] = 0$ i autokorelacijskom funkcijom

$$A(\tau) = \sum_{k=1}^{n} d_k^2 \cos\lambda_k \tau. \tag{52}$$

Taj se proces može interpretirati kao slučajni signal sastavljen od periodičnih komponenata sa slučajnim amplitudama. Disperzija

$$\mathrm{D}[X_t] = A(0) = \sum_{k=1}^{n} d_k^2 \tag{53}$$

može se smatrati ukupnom ***očekivanom snagom signala,*** jer je $\mathrm{D}[X_t] = \mathrm{E}[X_t^2]$. Opaža se da je ukupna očekivana snaga signala sastavljena od dijelova $d_k^2$ ($k = 1, \ldots, n$) od kojih se svaki može smatrati parcijalnom snagom pripadne periodične komponente kružne frekvencije $\lambda_k$. Zato se funkcija $\lambda_k \to d_k^2$ i naziva *spektar* promatranog procesa.

Općenito autokorelacijska funkcija $\tau \to A(\tau)$, $\tau \in \mathbf{R}$, procesa stacionarnog u širem smislu ima ova svojstva:

$$A(-\tau) = A(t) \quad \text{(parnost)}, \tag{54}$$

$$|A(\tau)| \leqq A(0) \quad \text{(ograničenost)}. \tag{55}$$

U proučavanju stacionarnih (u širem i užem smislu) procesa obično se pretpostavlja da je očekivanje procesa nula, što ne umanjuje općenitost razmatranja.

Navedeni primjeri procesa stacionarnih u širem smislu pokazuju da procesi sastavljeni od periodičnih komponenata imaju i pripadne autokorelacijske funkcije sastavljene od periodičnih komponenata, što upućuje na to da se istraže tzv. skoro periodični procesi. Ako je

$$X_t = U_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (U_k \cos\lambda_k t + V_k \sin\lambda_k t), \tag{56}$$

gdje su $\lambda_k$ konstante, a $U_0$, $U_k$ i $V_k$ ($k = 1, 2, \ldots$) nekorelirane slučajne varijable sa $\mathrm{E}[U_0] = \mathrm{E}[U_k] = \mathrm{E}[V_k] = 0$, $\mathrm{D}[U_0] = d_0^2$ i $\mathrm{D}[U_k] = \mathrm{D}[V_k] = d_k^2 \geqq 0$, onda se proces $\{X_t : t \in \mathbf{R}\}$ naziva *skoro periodični proces.* Skoro periodični proces može se smatrati slučajnim signalom sastavljenim od beskonačno mnogo periodičnih komponenata s nekoreliranim slučajnim amplitudama. Temeljno mu je svojstvo da je to proces stacionaran u širem smislu i da mu pripada autokorelacijska funkcija

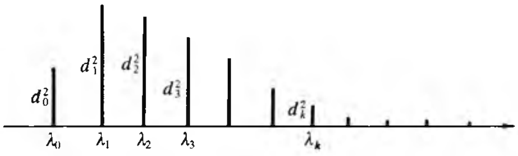
$$A(\tau) = d_0^2 + \sum_{k=1}^{\infty} d_k^2 \cos\lambda_k \tau, \tag{57}$$

te da ima očekivanje nula i disperziju

$$\mathrm{D}[X_t] = A(0) = \sum_{k=0}^{\infty} d_k^2 = s_0^2. \tag{58}$$

Stavi li se $\lambda_0 = 0$, onda se funkcija $\lambda_k \to d_k^2$ ($k = 0, 1, \ldots$), kojom se kružnoj frekvenciji $\lambda_k$ pridružuje parcijalna snaga $d_k^2$ $k$-te periodične komponente, naziva spektar zadanoga skoro periodičnog procesa. Skoro periodični proces ima tzv. *diskretni spektar* (sl. 3).

Za procese stacionarne u širem smislu vrijedi sljedeće: Ako procesu pripada autokorelacijska funkcija oblika (57) i ako je zadovoljen uvjet (58), onda je to skoro periodični proces sa spektrom $\lambda_k \to d_k^2$.




Sl. 3. Shematski prikaz diskretnog spektra

Ako se autokorelacijska funkcija procesa stacionarnog u širem smislu može razviti u Fourierov red nad segmentom $[-T, T]$ $(T > 0)$, pojavit će se kao kružne frekvencije brojevi $\lambda_0 = 0$, $\lambda_1 = \lambda$, $\lambda_2 = 2\lambda, \ldots, \lambda_k = k\lambda, \ldots$ $(\lambda = \pi/T)$, a kao parcijalne snage (disperzije) periodičnih komponenata pripadni Fourierovi koeficijenti:

$$d_0^2 = \frac{1}{T}\int_0^T A(\tau)\,d\tau, \tag{59}$$

$$d_k^2 = \frac{2}{T}\int_0^T A(\tau)\cos k\lambda\tau\,d\tau, \quad k = 1, 2, \ldots \tag{60}$$

Korisno je napomenuti da se skoro periodičan proces može prikazati i kao beskonačna suma samih sinusa (ili kosinusa). Stavi li se, naime, da je

$$A_k = \sqrt{U_k^2 + V_k^2}, \quad U_k = A_k \sin\varphi_k, \quad V_k = A_k\cos\varphi_k, \quad k = 1, 2, \ldots, \tag{61}$$

izraz (56) prelazi u oblik

$$X_t = U_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin(\lambda_k t + \varphi_k), \tag{62}$$

pa se može reći da se radi o slučajnom signalu sastavljenu od beskonačno mnogo sinusnih komponenata sa slučajnim amplitudama $A_k$ i slučajnim fazama $\varphi_k$.

U Gaussovu skoro periodičnom procesu $\{X_t : t \in \mathbf{R}\}$ slučajne su varijable $U_0$, $U_k$ i $V_k$ $(k = 1, 2, \ldots)$ nezavisne i normalno distribuirane. Iz toga proizlazi da su $A_k$ i $\varphi_k$ $(k = 1, 2, \ldots)$ također nezavisne slučajne varijable, pri čemu $A_k$ ima pripadnu *Rayleighovu razdiobu* (ovisnu o $d_k^2$), a $\varphi_k$ uniformnu razdiobu nad segmentom $[0, 2\pi]$. Nadalje vrijedi da je $X_t$ slučajna varijabla *normalne razdiobe* $\mathcal{N}(0, s_0^2)$ za svaki $t \in \mathbf{R}$.

**Spektralna analiza procesa.** Nameće se pitanje što se može reći o procesu stacionarnu u širem smislu kad pripadna autokorelacijska funkcija nema oblik (57), odnosno kad se ne može razviti u Fourierov red nad konačnim segmentom. Ako je autokorelacijska funkcija $\tau \to A(\tau)$ neprekidna, što je redovit slučaj u procesima važnim u primjenama, onda se ona može prikazati u obliku *Fourierova integrala*

$$A(\tau) = \int_0^\infty S(\lambda)\cos\lambda\tau\,d\lambda, \tag{63}$$

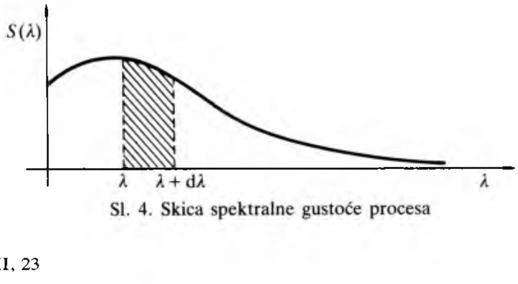
gdje je

$$S(\lambda) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty A(\tau)\cos\lambda\tau\,d\tau. \tag{64}$$

Budući da je $A(0) = D[X_t] = s_0^2$, iz (63) se dobiva

$$s_0^2 = \int_0^\infty S(\lambda)\,d\lambda, \tag{65}$$

što pokazuje da je integral funkcije $\lambda \to S(\lambda)$ u intervalu $[0, \infty)$ jednak disperziji procesa, tj. ukupnoj očekivanoj snazi. Veličina $S(\lambda)\,d\lambda$ može se približno interpretirati kao onaj dio disperzije (snage) koji otpada na frekvencije iz segmenta $[\lambda, \lambda + d\lambda]$, pa se funkcija $\lambda \to S(\lambda)$, $\lambda \geqq 0$, naziva *spektralna gustoća* procesa (sl. 4).




Sl. 4. Skica spektralne gustoće procesa

Ako se proces stacionaran u širem smislu promatra kao slučajni signal, onda pripadna spektralna gustoća pokazuje razdiobu snage na sve moguće frekvencije od nula do beskonačno. Izrazima (63) i (64) definira se tzv. *Fourierova kosinusna transformacija* kojom se uspostavlja korespondencija između autokorelacijske funkcije i spektralne gustoće procesa. Uzme li se da je snaga jednoliko razdijeljena na frekvencije iz segmenta $[0, b]$ $(b > 0)$, tj. da je spektralna gustoća procesa:

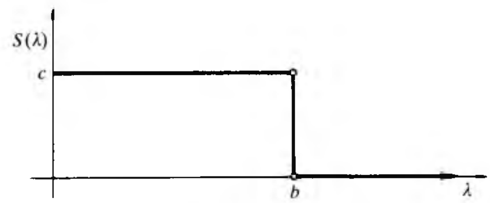
$$S(\lambda) = \frac{s_0^2}{b} = c \quad (c > 0) \text{ za } 0 \leqq \lambda \leqq b, \tag{66}$$

$$S(\lambda) = 0, \quad \text{za } \lambda > b, \tag{67}$$

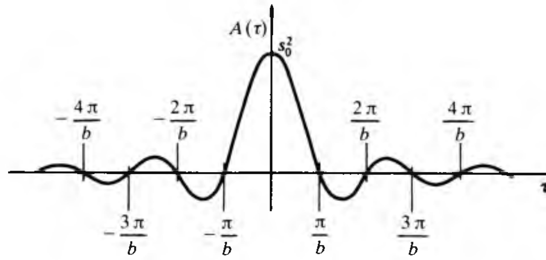
onda se pripadni proces stacionaran u širem smislu naziva *bijeli šum ograničenog frekventnog opsega* (sl. 5). Njegova je autokorelacijska funkcija

$$A(\tau) = \frac{s_0^2}{b}\int_0^b \cos\lambda\tau\,d\lambda = s_0^2\frac{\sin b\tau}{b\tau}. \tag{68}$$

Iz izraza (68) i slike 6 vidi se da se koreliranost između stanja $X_t$ i stanja $X_{t+\tau}$ zadanog procesa oscilatorno mijenja u ovisnosti o $\tau$, uz stalno smanjivanje amplitudâ oscilacija. Nekoreliranost se pojavljuje za $\tau = k\pi/b$, $k = 1, 2, \ldots$, pa se vidi da su točke nekoreliranosti to gušće što je $b$ veće.




Sl. 5. Spektralna gustoća bijelog šuma ograničenoga frekventnog opsega




Sl. 6. Graf autokorelacijske funkcije bijelog šuma ograničenoga frekventnog opsega

Za $b = \infty$ i $s_0^2 = \infty$ uz konačnu vrijednost od $c$, govori se o *bijelom šumu*. To, dakako, nije stohastički proces u običnom smislu, ali se u proširenom smislu može smatrati procesom stacionarnim u širem smislu u kojem je snaga jednoliko razdijeljena na sve moguće frekvencije od nula do beskonačno. Tada je spektralna gustoća

$$S(\lambda) = c \quad (c > 0), \quad \lambda \in [0, \infty). \tag{69}$$

Bijelom šumu pripada beskonačna disperzija (snaga), što se vidi iz izraza (65) i slike 5 kad se stavi da je $b = \infty$. Njegova autokorelacijska funkcija može se napisati u obliku

$$A(\tau) = c\pi\,\delta(\tau), \tag{70}$$

gdje je $\tau \to \delta(\tau)$ *Diracova delta-funkcija*, koja zapravo nije funkcija u uobičajenom smislu, jer ima nekonzistentna svojstva da je $\delta(\tau) = 0$ za $\tau \neq 0$ i

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(\tau)\,d\tau = 1, \quad \text{odnosno} \quad \int_0^\infty \delta(\tau)\,d\tau = \frac{1}{2}. \tag{71}$$

Relacijom (70) izriče se da su za svako $\tau \neq 0$ stanje procesa u trenutku $t$ i stanje procesa u trenutku $t + \tau$ nekorelirane slučajne varijable. Bijeli se šum ne može ostvariti kao određen stohastički proces (ima beskonačnu disperziju), ali može poslužiti kao približan matematički model za opisivanje stvarnih šumova u elektroničkim uređajima i još nekih drugih prirodnih pojava (morskih valova i sl.).

Ako se pođe od bijelog šuma ograničena frekventnog opsega za koji se još pretpostavi da je Gaussov proces, odakle slijedi da je $X_t$ slučajna varijabla normalne distribucije $\mathcal{N}(0,s_0^2)$ za svaki $t \in \mathbf{R}$, te pusti da $s_0^2$ i $b$ teže u beskonačnost tako da je $s_0^2/b = c$ (konstanta), onda se dobiveni granični proces naziva *Gaussov bijeli šum.* On se još naziva i ***čisto slučajni proces***, jer proizlazi da su $X_t$ i $X_{t+\tau}$ $(\tau \neq 0)$ nezavisne slučajne varijable.

$$\{X_t : t \in \mathbf{R}\} \longrightarrow \boxed{\text{Linearni sustav}} \longrightarrow \{Y_t : t \in \mathbf{R}\}$$

Sl. 7. Shematski prikaz linearnog sustava

**Linearni sustav.** Važnu ulogu ima proučavanje stacionarnih stohastičkih procesa u frekventnom području za proučavanje djelovanja tzv. *linearnog sustava* (sl. 7). Ako je $\{X_t : t \in \mathbf{R}\}$ stohastički proces s ograničenim očekivanjem $\mathrm{E}[X_t] = m_X(t)$ i ograničenom disperzijom $\mathrm{D}[X_t] = s_X^2(t)$ te ako se njegove trajektorije $t \to x(t)$ podvrgnu transformaciji

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(t,u)x(u)\,\mathrm{d}u, \tag{72}$$

gdje je $G$ tzv. *Greenova funkcija,* koja predstavlja odziv sustava na jedinični ulazni signal $\delta(u-t)$, onda se stohastički proces $\{Y_t : t \in \mathbf{R}\}$ s trajektorijama $t \to y(t)$ naziva *odziv linearnog sustava* zadana odzivnom funkcijom $G$ na pobudu stohastičkim procesom $\{X_t : t \in \mathbf{R}\}$. Općenito vrijedi

$$\mathrm{E}[Y_t] = m_Y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(t,u)m_X(u)\,\mathrm{d}u. \tag{73}$$

Ako odzivna funkcija $G$ ovisi samo o razlici $t-u$ tako da se može pisati $G(t,u) = H(t-u)$, onda se kaže da je to *vremenski invarijantan linearni sustav* ili *linearni filtar.* Tada (72) postaje

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} H(t-u)x(u)\,\mathrm{d}u. \tag{74}$$

Ako je ulazni proces $\{X_t : t \in \mathbf{R}\}$ stacionaran u širem smislu s očekivanjem $m_0$ i pripadnom autokorelacijskom funkcijom $\tau \to A(\tau)$, onda je i izlazni proces $\{Y_t : t \in \mathbf{R}\}$ stacionaran u širem smislu s očekivanjem koje ne ovisi o $t$

$$m_Y(t) = m_0 \int_{-\infty}^{\infty} H(\tau)\,\mathrm{d}\tau \tag{75}$$

i autokorelacijskom funkcijom

$$A_Y(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} H(t)H(u)A(\tau+t-u)\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}u. \tag{76}$$

Ako je ulazni proces Gaussov, takav je i izlazni.

Stavi li se u (74) $x(u) = \exp(\mathrm{i}\lambda u) = \cos\lambda u + \mathrm{i}\sin\lambda u$, dobiva se

$$y(t) = \exp(\mathrm{i}\lambda t)\int_{-\infty}^{\infty} H(v)\exp(-\mathrm{i}\lambda v)\,\mathrm{d}v. \tag{77}$$

Uvede li se oznaka

$$\hat{H}(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} H(v)\exp(-\mathrm{i}\lambda v)\,\mathrm{d}v, \tag{78}$$

relacija se (77) može napisati u obliku

$$y(t) = \hat{H}(\lambda)\exp(\mathrm{i}\lambda t). \tag{79}$$

Iz (77), (78) i (79) razabire se da se djelovanjem linearnog filtra na harmonijsku funkciju $t \to \exp(\mathrm{i}\lambda t)$ ne mijenja kružna frekvencija $\lambda$, već eventualno samo amplituda i faza.

Općenito se funkcija $\lambda \to \hat{H}(\lambda)$ naziva *prijenosna funkcija* linearnog filtra i ona opisuje promjenu amplitude i faze ulazne harmonijske funkcije pri prolazu kroz linearni filtar.

Ako je ulazni proces skoro periodičan, što znači da ima diskretni spektar, onda će i izlazni proces imati diskretni spektar sastavljen od istih kružnih frekvencija, ali s pripadnim disperzijama (snagama) koje se dobivaju množenjem pripadnih disperzija ulaznog procesa faktorom $|\hat{H}(\lambda)|^2$. Ako pak ulazni proces ima spektralnu gustoću $S(\lambda)$, izlazni će proces imati spektralnu gustoću $S_Y(\lambda) = |H(\lambda)|^2 S(\lambda)$.

Ako je linearni filtar definiran linearnom diferencijalnom jednadžbom $n$-tog reda

$$a_n y^{(n)}(t) + \ldots + a_1 y'(t) + a_0 y(t) = x(t), \tag{80}$$

onda mu je pripadna prijenosna funkcija

$$\hat{H}(\lambda) = [P(\lambda)]^{-1}, \tag{81}$$

gdje je $P(\lambda) = a_0 + a_1(\mathrm{i}\lambda) + \ldots + a_n(\mathrm{i}\lambda)^n$. Tada je

$$S_Y(\lambda) = [\mathrm{P}(\lambda)]^{-2} S(\lambda), \tag{82}$$

iz čega se razabire da za dobivanje spektralne gustoće izlaznog procesa nije potrebno eksplicitno poznavanje odzivne funkcije $H$ toga linearnog filtra.

Uzme li se, npr., linearna diferencijalna jednadžba prvog reda $y'(t) + \alpha y(t) = x(t)$ $(\alpha > 0)$ kao linearni filtar za ulaze $x(t)$, pripadna je prijenosna funkcija $\hat{H}(\lambda) = (\alpha + \mathrm{i}\lambda)^{-1}$, pa je $S_Y(\lambda) = (\alpha^2 + \lambda^2)^{-1} S(\lambda)$. Ako se kao ulazni proces uzme bijeli šum, $S(\lambda) = \mathrm{c}$, spektralna je gustoća izlaznog procesa

$$S_Y(\lambda) = \frac{c}{\alpha^2 + \lambda^2}, \tag{83}$$

pa to nije bijeli šum, već proces u kojem visokim frekvencijama $(\lambda \to \infty)$ pripada mala snaga, $S_Y(\lambda) \to 0$. Na temelju poznavanja spektralne gustoće procesa može se dobiti i pripadna autokorelacijska funkcija oblika

$$A(\tau) = \sigma^2 \exp(-\alpha|\tau|), \tag{84}$$

gdje je $\sigma^2 = c\pi/(2\alpha)$. Prema tome, filtriranjem bijelog šuma zadanom linearnom diferencijalnom jednadžbom prvog reda dobiva se izlazni proces $\{Y_t : t \in \mathbf{R}\}$ koji ima autokorelacijsku funkciju (84), pa se vidi da postoji konačna disperzija $\mathrm{D}[Y_t] = A(0) = \sigma^2$. Takav se proces naziva *Markovljev proces drugog reda.* On općenito nema svojstvo Markovljevih procesa. Ako je, međutim, ulazni proces $\{X_t : t \in \mathbf{R}\}$ Gaussov bijeli šum, onda se iz zadane linearne diferencijalne jednadžbe razabire da za izlazni proces $\{Y_t : t \in \mathbf{R}\}$ približno vrijedi $\Delta Y_t \approx -\alpha Y_t \Delta t + X_t \Delta t$. Vidi se da prirast $\Delta Y_t = Y_{t+\Delta t} - Y_t$ izlaznog procesa, kao slučajna varijabla, ovisi samo o stanju procesa $Y_t$ u trenutku $t$ i o stanju $X_t$ ulaznog procesa. To je stanje, zbog pretpostavke da se radi o Gaussovu bijelom šumu, neovisno o prethodnim stanjima ulaznog procesa. To znači da izlazni proces ima svojstvo Markovljeva procesa, tj. distribucija slučajne varijable $Y_{t+\Delta t} = Y_t + \Delta Y_t$ ne ovisi o ponašanju procesa prije trenutka $t$. Takav se proces naziva *Gauss-Markovljev proces.*

**Ergodičnost.** Izložena teorija stohastičkih procesa opisuje statistička svojstva realnih procesa koja se odnose na skup svih mogućih realizacija (trajektorija) procesa. U praksi se, međutim, redovito može izmjeriti (opažati) samo jedna realizacija kroz određeni vremenski period $T$, jer je teško ili nemoguće osigurati iste uvjete za ponavljanje takva eksperimenta. Budući da je realizacija stohastičkog procesa redovito realna funkcija, definiraju se statistički parametri realne funkcije $t \to x(t)$ u vremenskom intervalu $[-T, T]$, a to su:

$$\bar{m}_T = \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} x(t)\,\mathrm{d}t \quad (\textit{sredina funkcije}), \tag{85}$$

$$\bar{s}_T^2 = \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} [x(t) - \bar{m}_T]^2\,\mathrm{d}t \quad (\textit{disperzija funkcije}), \tag{86}$$

$$\bar{A}_T(\tau) = \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} [x(t) - \bar{m}_T][x(t+\tau) - \bar{m}_T]\,\mathrm{d}t \quad (\textit{korelacijski momentfunkcije}). \tag{87}$$

Ako je $\{X_t : t \in \mathbf{R}\}$ stacionaran proces s očekivanjem $m_0$ i autokorelacijskom funkcijom $\tau \rightarrow A(\tau)$, onda se može zamisliti da je za svaku njegovu realizaciju $t \rightarrow x(t)$ izračunan navedeni statistički parametar u vremenskom intervalu $(-\infty, \infty)$, tako da se $\bar{m} = \bar{m}_\infty$, $\bar{s}^2 = \bar{s}^2_\infty$ i $\bar{A}(\tau) = \bar{A}_\infty(\tau)$ mogu shvatiti kao slučajne varijable. Matematičko očekivanje statističkog parametra na realizaciji procesa jednako je pripadnom parametru promatranog procesa, tj. vrijedi

$$\mathrm{E}[\bar{m}] = m_0, \quad \mathrm{E}[\bar{A}(\tau)] = A(\tau), \quad \mathrm{E}[\bar{s}^2] = A(0) = s_0^2. \tag{88}$$

Ako, međutim, vrijedi tvrdnja da je s vjerojatnošću jedan $\bar{m} = m_0$, $\bar{A}(\tau) = A(\tau)$ i $\bar{s}^2 = s_0^2$, onda se radi o tzv. *ergodičkom procesu*. To praktički znači da se osnovni parametri ergodičkog procesa približno mogu dobiti na temelju jedne njegove realizacije kroz dovoljno dug vremenski period.

Nije svaki stacionarni proces ergodičan. Tako, npr., već jednostavan proces, gdje je $X_t = X_0$ za svaki $t \in \mathbf{R}$, a $X_0$ nedegenerirana slučajna varijabla s očekivanjem $m_0$ i disperzijom $s_0^2 > 0$, nije ergodičan. To je očito stacionaran proces, ali nije ergodičan jer je svaka njegova realizacija $x(t) = x_0$ (pravac usporedan s apscisnom osi), tako da je $\bar{m} = x_0$ i $\bar{s}^2 = 0$, što proturječi nužnim svojstvima ergodičkog procesa. Jedna od realizacija tog procesa nikako ne može reprezentirati čitav proces, što se, zapravo, događa u ergodičkom procesu.

Isto su tako već spomenute oscilacije sa slučajnom fazom primjer procesa stacionarnog u širem smislu koji nije ergodičan, što vrijedi i za slučajni signal sastavljen od periodičnih komponenata sa slučajnim amplitudama.

Gaussov stacionarni proces bit će ergodičan samo onda ako ne sadrži periodične komponente.

LIT.: *J. L. Doob*, Stochastic Processes. John Wiley, New York 1953. – *J. G. Kemeny, J. L. Snell*, Finite Markov Chains. Van Nostrand, New York 1960. – *S. Karlin*, A First Course in Stochastic Processes. Academic Press, New York-London 1968. – *L. Breiman*, Probability and Stochastic Processes with a View toward Applications. Houghton Mifflin Co., Boston 1969. – *A. B. Clarke, R. L. Disney*, Probability and Random Processes for Engineers and Scientists. John Wiley, New York 1970. – *Z. A. Ivković*, Uvod u teoriju verovatnoće, slučajne procese i matematičku statistiku. Građevinska knjiga, Beograd 1970. – *N. Sarapa*, Teorija vjerojatnosti. Školska knjiga, Zagreb 1987. – *Ž. Pauše*, Vjerojatnost, informacije, stohastički procesi. Školska knjiga, Zagreb 1988. – *J. Mališić*, Slučajni procesi – teorija i primene. Građevinska knjiga, Beograd 1989.

*Ž. Pauše*

**STROPOVI,** vodoravne, kose ili zasvođene (zakrivljene) konstrukcije koje zatvaraju prostor s gornje strane i dijele zgradu na katove. Stropovi preuzimaju sva stalna i pokretna opterećenja koja nastaju upotrebom gornjega i, eventualno, donjeg prostora, prenose ih na zidove i stupove, te istodobno vodoravno povezuju i učvršćuju strukturu zgrade. Osim toga, stropovi su zaštita od zvuka, topline, vlage i požara, a nosioci su i horizontalnih instalacija. Da bi stropovi mogli udovoljiti tim zahtjevima, često se grade višeslojno, što utječe na njihovu debljinu, a i na konačnu visinu zgrade.

Stropovi u obliku svoda obrađeni su u posebnim člancima (v. *Svodovi*; v. *Ljuske*, TE 7, str. 623).

Stropovi se sastoje od sljedećih dijelova: *a*) nosive konstrukcije, koja može biti od drva, armiranog betona, opeke, kamena i čelika, te od kombinacija tih materijala; *b*) izolacijskog sloja za zaštitu od zvuka, topline, vlage i požara; *c*) poda, najgornjeg vodoravnog ili malo kosog sloja koji služi kao komunikacijska površina (v. *Podovi*, TE 10, str. 494); *d*) podgleda (plafona), najdonjeg sloja od žbuke, drveta, metala i dr. Izolacijski sloj, pod i podgled koji se, već prema namjeni, sastoje od jednoga ili više slojeva, nekad se mogu posve ili djelomice izostaviti.

Nosiva se konstrukcija dimenzionira prema statičkom proračunu na temelju dopuštenih naprezanja i poznatoga stalnog i pokretnog opterećenja stropa. Stalno je opterećenje određeno težinom svih stropnih elemenata, a pokretno opterećenje ovisi o namjeni prostorija (tabl. 1).

Tablica 1
PRIVREMENI TEHNIČKI PROPISI ZA OPTEREĆENJE ZGRADA

| *Vrsta prostorija* | $N/m^2$ |
|---|---|
| Prostorije na tavanu za domaću upotrebu | 1000 |
| Prostorije za stanovanje i sporedne prostorije: | |
| – raspona do 4,5 m | 1250 |
| – raspona 4,5···5 m | 1500 |
| Velike stambene, trgovačke, službene prostorije, bolnice, prohodne terase | 2000 |
| Stubišta u stambenim zgradama, balkoni, školske prostorije | 3000 |
| Čekaonice, prodavaonice, hodnici i stubišta u javnim i trgovačkim zgradama | 4000 |
| Prostorije za skupove (kina, dvorane, gimnastičke dvorane, kazališta), tribine sa stalnim sjedištima | 4500 |
| Garderobe, knjižnice, knjižare, arhivi | 5000 |
| Tribine bez stalnih sjedišta | 6500 |

Izbor vrste nosive konstrukcije ovisi o vrsti nosivih stijena, potrebnoj zaštiti od vlage i požara, rasponu i opterećenju stropa i sl. Drvene stijene zahtijevaju i drvene stropove, a stropovi izloženi vlazi ili mogućnosti požara, te stropovi velikih raspona ili s velikim opterećenjem grade se od masivnog materijala.

Izolacijski sloj, kao zvučna i toplinska zaštita, izrađuje se u obliku nasipa, laganih namaza ili ploča. Nasip debljine 5···8 cm mora biti od laganog, sitnozrnatog, čistog i suhog materijala (prašina od opeke, pijesak, usitnjena troska), odnosno od mineralne ili staklene vune. Nasip se danas rijetko radi. Lagani namazi debljine 3···5 cm postavljaju se ispod poda, a mogu biti od drvene piljevine i magnezitnog cementa, od mineralizirane piljevine i portland-cementa, laganog betona, usitnjenog *okipora* povezanog veznim sredstvom i dr. Izolacijske ploče od *drvene blanjevine* (talašike), vlakanaca, pluta, slame, mineralne vune, okipora, sadre i sl. polažu se iznad ili ispod nosive konstrukcije, a često se kombiniraju s tankim nasipom ili namazom.

Ako je strop ujedno i vanjska konstrukcija, pa su razlike temperatura između vanjskoga i unutrašnjeg dijela znatne, potrebno je, osim toplinske izolacije i hidroizolacije, predvidjeti i parnu branu da bi se spriječila kondenzacija pare unutar stropne konstrukcije.

U prostorijama u kojima je strop izložen vlazi potreban je ispod poda poseban izolacijski sloj.

## DRVENI STROPOVI

Drveni stropovi najstarije su stropne konstrukcije. Njihova je izradba jednostavna i brza, lagani su i odmah nosivi. Mane su drvenih stropova: mala nosivost uz razmjerno veliku konstrukcijsku visinu, trešnja, opasnost od požara i njihovo brzo propadanje u dodiru s vlagom. Zbog toga je potrebno upotrebljavati dovoljno suhu građu i da bude stalno zaštićena od vlage. Drveni se stropovi izrađuju od jelovih ili smrekovih tesanih ili piljenih greda, platica ili dasaka.

**Gredni stropovi** grade se do slobodnog raspona koji nije veći od 6 m. Za veće raspone, naime, grede postaju prevelike i neekonomične, a strop se uvija i jako trese. Kad se od oblog drveta pili ili teše greda, omjer širine i visine iznosi od 1:2 do 5:7, da bi se građa što povoljnije iskoristila. Ako je greda skrivena u konstrukciji, ima tupe bridove.

Međusobna udaljenost greda ovisi o debljini gornje oplate, pa za oplatu od 24 mm i za normalno opterećenje udaljenost najčešće nije veća od 100 cm. Dimenzije se greda određuju statičkim proračunom.

Grede leže u udubini ili na stepenu zida, redovito na armiranobetonskom serklažu, na podlozi od bitumenske ljepenke. Dubina je ležaja 2/3 visine grede, ali ne smije biti manja od 12 cm. Glava je grede zaštićena premazom protiv