

Sl. 18. Tenzometarska rozeta s centralnim prstenom za vođenje svrdla kad se buši provrt

ske rozete s ugrađenom vodilicom (sl. 18), naknadnom korekcijom dobivenih rezultata kojom se uzima u obzir elastičan položaj provrta prema rozeti, upotrebom posebno brušenih svrdala za bušenje, bušenjem provrta abrazivnim postupcima, a kad su zaostala naprezanja velika treba primijeniti neki drugi mjerni postupak.

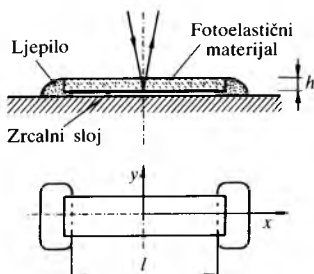
### FOTOELASTIČNI TENZOMETRI

Fotoelastični tenzometar tanki je sloj posebno oblikovana fotoelastičnog materijala (v. *Fotoelasticimetrija*, TE 5, str. 525), kojemu je unutrašnja površina premazana reflektirajućim slojem i koji je prilijepljen na površinu konstrukcije. Kad se opterećena konstrukcija deformira, ta se deformacija prenosi na tenzometar. Slike se izoklina i izokroma (v. *Fotoelasticimetrija*, TE 5, str. 527) koje nastaju u fotoelastičnom materijalu tenzometra promatraju pomoću refleksijskog polariskopa. Prema tim se slikama određuju pravci i vrijednosti glavnih naprezanja.

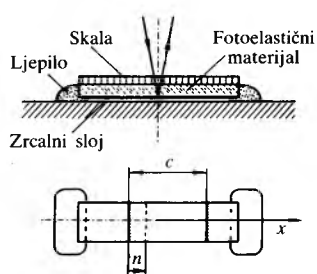
Fotoelastični tenzometri u obliku punih staklenih valjaka prvi se put spominju 1957, a upotrebljavaju se za mjerenje naprezanja u stijenama i većim strojarskim konstrukcijama. Najjednostavniji je fotoelastični tenzometar pločica fotoelastičnog materijala sa zrcalnim slojem s donje strane (sl. 19), koja se zalijepi na konstrukciju. Deformacija se konstrukcije izračunava prema relaciji

$$\varepsilon_x = \frac{f_\varepsilon}{2h(1+\nu)}, \quad (20)$$

gdje je  $f_\varepsilon$  fotoelastična konstanta,  $h$  debljina fotoelastičnog materijala, a  $\nu$  Poissonov koeficijent. Nedostatak je tog tenzometra njegova osjetljivost na temperaturne promjene.



Sl. 19. Jednostavni fotoelastični tenzometar



Sl. 20. Fotoelastični tenzometar sa zamrznutim izokromama

Da bi se povećala osjetljivost fotoelastičnog tenzometra, upotrebljava se tenzometar sa zamrznutim fotoelastičnim efektom (sl. 20; v. *Fotoelasticimetrija*, TE 5, str. 529).

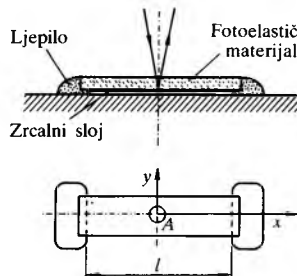
Deformacije se konstrukcije računaju iz pomaka izokrome  $n$  koji nastaje pri opterećenju, prema izrazima

$$\varepsilon_x = n \varepsilon_0, \quad (21a)$$

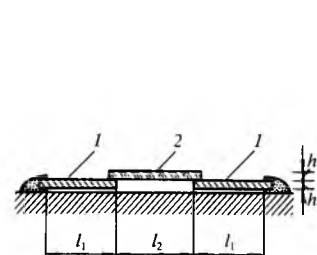
$$\varepsilon_0 = \frac{f_\varepsilon}{2h(1+\nu)c}, \quad (21b)$$

gdje je  $c$  razmak između izokroma.

Tenzometar s provrtom u fotoelastičnom materijalu (sl. 21) također povećava točnost mjerenja. Zbog koncentracije naprezanja oko provrta povećava se red izokroma (v. *Fotoelasticimetrija*, TE 5, str. 527) koje se tada mogu točnije očitati. Deformacija se izračunava prema izrazu



Sl. 21. Fotoelastični tenzometar s koncentradorom naprezanja



Sl. 22. Fotoelastični tenzometar sastavljen od materijala različitih koeficijenata toplinske dilatacije

$$\varepsilon_x = \frac{f_\varepsilon N_A}{2h(1+\nu)\alpha_k}, \quad (22)$$

gdje je  $N_A$  red izokrome u točki  $A$ , a  $\alpha_k$  faktor koncentracije naprezanja koji pokazuje povećanje naprezanja u točki  $A$  zbog provrta.

Tenzometar sastavljen od materijala različitih koeficijenata toplinske dilatacije  $\alpha_1$  i  $\alpha_2$  (sl. 22) omogućuje da se smanji ili poništi utjecaj temperaturne promjene na izmjerenu deformaciju. Deformacija se konstrukcije računa prema relaciji

$$\varepsilon_x = \frac{\left(\frac{2l_1 E_1 A_1}{l_2 E_2 A_2} + 1\right) l_1}{(2l_1 + l_2)} \cdot \frac{f_\varepsilon N}{2h(1+\nu)}, \quad (23)$$

gdje su  $E_1$  i  $E_2$  moduli elastičnosti dvaju dijelova tenzometra ( $1$  i  $2$ ),  $A_1$  i  $A_2$  ploštine njihovih poprečnih presjeka, a  $l_1$  i  $l_2$  njihove duljine. Fotoelastični efekt promatra se u gornjem dijelu tenzometra. Kad se promijeni temperatura za  $\Delta T$ , nastat će dodatna deformacija  $\varepsilon_T = (1+\nu)(\alpha_2 - \alpha_1)\Delta T$ .

Ako je tenzometar građen tako da je  $\alpha_1 = \alpha_2$ , nema dodatne deformacije  $\varepsilon_T$ , pa nije potrebna ni korekcija izmjerene deformacije. Na sličnom principu rade i drugi fotoelastični tenzometri u kojih je temperaturna deformacija  $\varepsilon_T$  djelomično ili potpuno kompenzirana.

M. Husnjak

LIT.: C. C. Perry, H. R. Lissner, *The Strain Gage Primer*. McGraw-Hill, New York 1962. – J. W. Dally, W. F. Riley, *Experimental Stress Analysis*. McGraw-Hill, New York 1965. – J. Avril, *Encyclopedie Vishay d'analyse des contraintes*. Vishay-Micromesures, Paris 1974. – K. Hoffmann, *Eine Einführung in die Technik des Messens mit Dehnungsmessstreifen*. Hottinger Baldwin Meßtechnik GmbH, Darmstadt 1987. – V. Brčić, R. Čukić, *Eksperimentalne metode u projektovanju konstrukcija*. Građevinska knjiga, Beograd 1988.

I. Heidl M. Husnjak

**TEORIJA ELASTIČNOSTI**, dio mehanike deformabilnih tijela koji obuhvaća sustavno proučavanje naprezanja, pomaka i deformacija čvrstih elastičnih tijela na koja djeluju sile. Za razliku od nauke o čvrstoći (v. *Nauka o čvrstoći*, TE 9, str. 277), koja se osniva na praktičnim pretpostavkama i upotrebljava jednostavne formule za proračune, teorija je elastičnosti općenitija i temelji se na općim

jednadžbama koje moraju biti zadovoljene za elastično tijelo bilo kakva geometrijskog oblika, opterećeno bilo kakvim skupom sila. S druge strane, ona je samo ogranak mehanike kontinuuma (v. *Mehanika kontinuuma*, TE 8, str. 173), koja, kao općenitija teorija, obuhvaća promatranje kontinuuma cjelovito, bez obzira radi li se o čvrstim, kapljevitim ili plinovitim tijelima i bez obzira na njihova svojstva. U teoriji elastičnosti uzimaju se u obzir svojstva materijala tijela, ali se ona ne proučavaju. U tom je smislu teorija elastičnosti usko povezana s naukom o materijalima i s otpornošću materijala gdje se proučavaju i definiraju njihova mehanička svojstva (v. *Otpornost građevnih materijala*, TE 10, str. 90). Prema matematičkoj formulaciji problema i metodama rješavanja ona je bliska matematičkoj fizici.

U prvom razdoblju razvoja teorije elastičnosti promatrani su problemi vezani uz tijela jednostavna geometrijskog oblika i jednostavno opterećena. Tako je G. Galilei (1564–1642) proučavao naprezanja u štapi kojemu je jedan kraj uklješten u zid, a na drugome visi teret koji ga savija. R. Hooke (1635–1703) postavio je zakon proporcionalnosti elastičnih čvrstih tijela (Hookeov zakon), J. Bernoulli (1654–1705) pokazao da se pri savijanju elastičnog štapa deplancija i distorzija poprečnog presjeka mogu zanemariti, a Ch. de Coulomb (1736–1806) postavio je teoriju savijanja štapa pravokutna poprečnog presjeka, za koju se pokazalo da u biti vrijedi i za ostale oblike štapa. Nakon toga Coulomb je proučavao uvijanje štapa, pa je smatrao da se kutna deformacija, koja je bitna značajka uvijanja, pojavljuje tek u trenutku loma. Tu je tvrdnju pobio Th. Young (1773–1829), koji kutnu deformaciju uvodi kao jednu od karakterističnih veličina elastično deformiranog tijela. Osim toga on uvodi i modul elastičnosti (Youngov modul) koji je do tad bio sadržan u zajedničkoj konstanti ovisnoj i o geometrijskom obliku tijela. Problem izvijanja štapa i njegove poprečne vibracije proučavao je L. Euler (1707–1783).

Savijanjem elastičnog štapa bavio se i C. L. M. H. Navier (1785–1836), koji je sistematizirao radove s tog područja. Osim toga, on je postavio dio osnova trodimenzijske teorije elastičnosti, premda je u svojim razmatranjima upotrebljavao samo jednu konstantu materijala. Osnovnim jednadžbama trodimenzijske teorije bavio se i A. L. Cauchy (1789–1857). On je izveo jednadžbe veza između pomaka i deformacija u obliku u kojem se i danas primjenjuju. Izvedeci ostale jednadžbe upotrijebio je dvije konstante izotropnog elastičnog tijela. S. D. Poisson (1781–1840) istraživao je fizikalni smisao te druge konstante. Procijenio je da ona, kasnije nazvana njegovim imenom, iznosi 0,25. Navier, Cauchy i Poisson zaslužni su za postavljanje temeljnih jednadžbi trodimenzijskih problema teorije elastičnosti koje se i danas primjenjuju u gotovo nepromijenjenu obliku. Te jednadžbe sadrže za izotropno tijelo dvije konstante: Youngov modul elastičnosti i Poissonov koeficijent. Za opće anizotropno tijelo Cauchy je pretpostavio 21 konstantu, a razjašnjenju tog važnog pitanja konstanta izotropnih i anizotropnih tijela pridonio je G. Green (1793–1841) istražujući mehanička svojstva kristala.

Razvoj klasične teorije elastičnosti nastavlja se sve do 1900. U tom je razdoblju G. Lamé (1795–1870) prostorno predočio promjenu naprezanja u točki tijela (Laméov elipsoid), a umjesto Youngova modula elastičnosti i Poissonova koeficijenta uveo je dvije nove konstante, prikladnije za matematičku formulaciju teorije elastičnosti (Laméove konstante). Pošto je 1811. J. L. Lagrange (1736–1813) postavio opće jednadžbe za savijanje ploča, riješio ih je Navier (1820) za pravokutnu ploču i odredio naprezanja i deformacije, a Poisson je ponovno izveo (1828) Lagrangeove jednadžbe i odredio vibracije kružne ploče. Svoje rezultate čvornih linija usporedio je s eksperimentima F. Savarta (1791–1841), što se ubraja u početke eksperimentalne provjere teorije elastičnosti. B. de Saint-Venant (1797–1886) riješio je problem torzije neokruglih presjeka, a za praktičnu je upotrebu izračunao niz koeficijenata i pomoćnih dijagrama. Lord Kelvin (W. Thomson, 1824–1907) odredio je 1848. naprezanja i deformacije elastičnoga beskonačnog prostora opterećena koncentriranom silom u jednoj točki, J. Boussinesque (1842–1929) riješio je problem beskonačnog poluprostora opterećena okomitom silom na ravninu poluprostora (1878), a V. Cerruti istraživao je 1882. isti problem samo uz opterećenje silom u ravnini poluprostora. Ta se tri rješenja nazivaju Kelvinovim, Boussinesqueovim i Cerrutijevim problemom. U isto je doba H. Hertz (1857–1894) pridonio rješavanju inženjerskog problema kontakta dvaju elastičnih tijela (Hertzove formule).

Nov pristup određivanju naprezanja dao je G. B. Airy (1801–1892) uvođenjem funkcije naprezanja (Airyjeva funkcija), iz koje se drugom derivacijom određuju naprezanja i tako istodobno zadovoljavaju i uvjeti ravnoteže. Tu je ideju razradio 1870. J. C. Maxwell (1831–1879) za trodimenzijska napregnuta stanja. Nov pristup teoriji elastičnosti imali su u to doba A. Castigliano (1847–1884) i Lord Rayleigh (J. W. Strutt, 1842–1919). Castigliano je 1870. postavio metodu za određivanje deformacija pomoću minimuma energije elastično deformiranog tijela, a Lord Rayleigh je primjenom istog principa razradio metodu za određivanje osnovnih parametara vibracija kontinuuma.

U drugoj polovici XIX. st. izdano je više monografija i udžbenika teorije elastičnosti. Dvije se knjige posebno ističu, jer sadrže iscrpan pregled svih dotadašnjih dostignuća na tom području. Prvu je napisao 1862. A. Clebsch (1833–1872) pod nazivom *Theorie der Elastizität fester Körper*. Saint-Venant je uz pomoć svojih učenika preveo tu knjigu 1883. na francuski i gotovo je dvostruko proširio. Nešto prije (1858) napisao je W. J. M. Rankine (1820–1872) *Manual of applied mechanics*, prvi opsežniji priručnik na engleskom jeziku (posljednje, dvadeseto izdanje izašlo 1919).

Početak XX. st. sve je veće zanimanje za primjenu teorije elastičnosti, posebno u građevinarstvu, strojogradnji i brodogradnji. Mnogi su znanstvenici pridonijeli razvoju teorije elastičnosti u tom razdoblju, kao što su J. H. Michell (1863–1940), L. Prandtl (1875–1953), A. Nadáia (1883–1963) i A. Föppl (1854–1924).

Cjelovit prikaz matematičke teorije elastičnosti na početku ovog stoljeća objavio je A. E. H. Love (1863–1940) u djelu *The Mathematical Theory of Elasticity*.

Na razvoj teorije elastičnosti XX. st. utjecala je i fotoelastimetrija (v. *Fotoelastimetrija*, TE 5, str. 525) eksperimentalnom provjerom teorijskih rješenja.

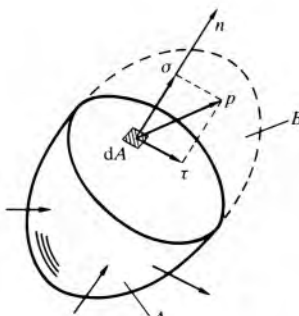
Posebnu je zaslugu za razvoj teorije elastičnosti u svijetu a i kod nas imao S. Timošenko (1878–1972), osnivač prve katedre za tehničku mehaniku na tehničkim studijima u Zagrebu (1919). Osim Timošenka, u nas su se teorijom elastičnosti bavili K. A. Čališev (1888–1970), Z. Kostrenčić (1915–1991), koji je autor prvoga cjelovitijeg udžbenika iz toga područja na hrvatskom jeziku, i drugi.

Klasična teorija elastičnosti bavi se izotropnim idealno elastičnim tijelima u kojih deformacije nastale zbog djelovanja sila potpuno nestaju kad sila prestanu djelovati. Pritom se pretpostavlja da između sila i deformacija postoji linearna ovisnost, kako je to u većine konstrukcijskih materijala. Sljedeća je pretpostavka da su promjene oblika tijela malene spram njegovih dimenzija (reda veličine  $10^{-3}$  i manje), pa se sve više potencije pomaka i deformacija, kao mjera promjene oblika, zanemaruju. Obje pretpostavke dovode do linearne teorije u kojoj su sve osnovne veličine (pomaci, deformacije, naprezanja) razmjerne silama.

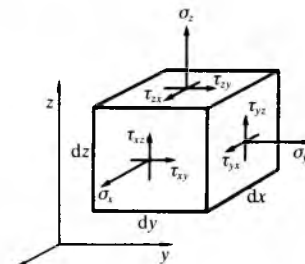
Pojave u anizotropnim tijelima razmatra teorija elastičnosti anizotropnih tijela, dok nelinearnost materijala i velike deformacije uzima u obzir nelinearna teorija elastičnosti. Trajne deformacije nastale u tijelu djelovanjem sila proučavaju teorija plastičnosti, teorija viskoelastičnosti i reologija, dok se za posebne probleme gdje su osim naprezanja definirani i unutrašnji spregovi u novije vrijeme razvila i teorija mikropolarne elastičnosti. Osim spomenutih teorija, koje su se odvojile kao zasebne, razvilo se iz klasične teorije elastičnosti više disciplina primijenjene teorije elastičnosti, kao što su teorija ploča i ljusaka, teorija stabilnosti i termoelastičnost.

## NAPREZANJA, POMACI I DEFORMACIJE

Kad na neko čvrsto tijelo djeluju vanjske sile, u svakom se njegovu presjeku pojavljuju unutrašnje sile, koje ne utječu na ravnotežu tijela sve dok njihova vrijednost ne prijeđe određenu granicu. Prekoračenjem te granice, koja je vezana uz pojam čvrstoće materijala, nastaje lom tijela, pa se njegova prvobitna ravnoteža narušava. Unutrašnje sile u bilo kojem presjeku tijela svedene na element ploštine toga presjeka daju puno naprezanje  $p$  koje u svakoj točki presjeka ima komponentu  $\sigma$  okomitu na ravninu presjeka i komponentu  $\tau$  koja leži u ravnini presjeka (sl. 1). Ako je jedna od osi odabranoga koordinatnog sustava okomita na presjek, normalno se naprezanje označava indeksom te osi ( $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  ili  $\sigma_z$ ). Komponenta  $\tau$ , rastavljena u dva preostala pravca koordinatnog sustava, daje tangencijalna ili posmična naprezanja (sl. 2) koja osim indeksa normale imaju i indeks one osi s kojom su paralelne ( $\tau_{xy}$ ,  $\tau_{xz}$  itd.). Na presjecima u kojih se vanjske normale poklapaju s pozitivnim smjerovima koordinatnih osi naprezanja su pozitivna ako im se smjer poklapa s pozitivnim smjerom koordinatnih osi. Ona su također pozitivna ako im



Sl. 1. Na presjeku opterećenog tijela na dio A djeluje dio B unutrašnjim silama koje su raspodijeljene po površini i u svakoj točki presjeka daju puno naprezanje  $p$ . Komponente naprezanja  $p$  jesu normalno naprezanje  $\sigma$  i tangencijalno  $\tau$



Sl. 2. Komponente tenzora naprezanja u točki tijela i njihovo označavanje

se smjer na presjecima u kojih su normale negativne osi poklapa sa smjerom negativnih osi koordinatnog sustava.

Osim što se u čvrstom tijelu zbog djelovanja vanjskih sila javljaju unutrašnje sile ono mijenja i svoj oblik. Svaka će se čestica tijela pomaknuti iz svoga prvobitnog položaja u novi. Vektor toga pomaka ima u koordinatnom sustavu tri komponente,  $\vec{\delta} = u\vec{i} + v\vec{j} + w\vec{k}$ , koje su pomaci točke tijela u smjerovima koordinatnih osi. Udaljenost između dviju točaka tijela također se mijenja, a mjera je te promjene u nekom pravcu linijska deformacija  $\varepsilon$ . Prvobitna udaljenost beskonačno bliskih točaka  $AB$  promijenit će se nakon opterećenja tijela i bit će  $A'B'$ , pa je linijska deformacija

$$\varepsilon = \frac{A'B' - AB}{AB} \quad (1)$$

Osim toga, svaki će se prvobitni pravi kut u tijelu promijeniti za neku vrijednost i ona je kutna deformacija  $\gamma$ . Uzima se da je ta deformacija pozitivna ako se prvobitni pravi kut smanjio.

Naprezanja, pomaci i deformacije mijenjaju se općenito od točke do točke tijela, pa su to funkcije koordinata položaja. Kad se vanjske sile mijenjaju s vremenom ili se mijenja temperatura, onda su oni i funkcije vremena i temperature. Više o definicijama tih veličina v. u člancima: *Mehanika kontinuuma*, TE 8, str. 173; *Nauka o čvrstoći*, TE 9, str. 277.

**Naprezanja.** Kad su vanjske sile koje djeluju na čvrsto tijelo u ravnoteži, mora i svaki element njegova obujma biti u ravnoteži. Na diferencijal obujma djeluju unutrašnje sile zbog naprezanja, a osim toga mogu djelovati i obujamne sile (gravitacijske, elektromagnetske, inercijske). Sve su te sile u ravnoteži ako je zbroj njihovih projekcija na tri međusobno okomite osi jednak nuli, te ako nema resultantnog momenta oko tih osi. Zbrojevi projekcija sila na osi  $x$ ,  $y$  i  $z$  daju diferencijalne jednadžbe ravnoteže:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + f_x = 0, \quad (2)$$

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} + f_y = 0, \quad (3)$$

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + f_z = 0, \quad (4)$$

gdje su  $f_x$ ,  $f_y$  i  $f_z$  komponente vektora obujamnih sila  $\vec{f} = f_x\vec{i} + f_y\vec{j} + f_z\vec{k}$ , s dimenzijom sile po obujmu. Resultantni moment jednak je nuli ako su zbrojevi momenta sila oko koordinatnih osi koje djeluju na diferencijal obujma jednaki nuli. Pomoću tih jednadžbi dobivaju se zakoni recipročnosti tangencijalnih naprezanja;

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}, \quad (5)$$

$$\tau_{yz} = \tau_{zy}, \quad (6)$$

$$\tau_{zx} = \tau_{xz}. \quad (7)$$

Vidi se da su u jednadžbama ravnoteže od šest tangencijalnih naprezanja samo tri međusobno različita. Uz tri normalna naprezanja te tri jednadžbe sadrže ukupno šest nepoznanica. U tom je smislu svaki zadatak teorije elastičnosti statički neodređen. Kad čestice tijela nisu u statičkoj ravnoteži (vibracije kontinuuma, širenje valova elastičnim tijelom), desne strane jednadžbi ravnoteže imaju umjesto nula inercijske članove  $\rho a_x$ ,  $\rho a_y$  i  $\rho a_z$ , gdje je  $\rho$  gustoća, a  $a$  pripadna komponenta ubrzanja točke tijela.

Naprezanja se iz jednog koordinatnog sustava u drugi preračunavaju pomoću transformacijskih formula koje vrijede za komponente tenzora drugog reda, pa su naprezanja komponente takva tenzora. Formule za transformaciju iz sustava  $x, y, z$  u novi sustav  $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$  glase:

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_x = & \sigma_x a_{11}^2 + \sigma_y a_{21}^2 + \sigma_z a_{31}^2 + 2(\tau_{xy} a_{11} a_{21} + \tau_{yz} a_{21} a_{31} + \\ & + \tau_{zx} a_{31} a_{11}), \end{aligned} \quad (8)$$

$$\bar{\sigma}_y = \sigma_x a_{12}^2 + \sigma_y a_{22}^2 + \sigma_z a_{32}^2 + 2(\tau_{xy} a_{12} a_{22} + \tau_{yz} a_{22} a_{32} + \tau_{zx} a_{32} a_{12}), \quad (9)$$

$$\bar{\sigma}_z = \sigma_x a_{13}^2 + \sigma_y a_{23}^2 + \sigma_z a_{33}^2 + 2(\tau_{xy} a_{13} a_{23} + \tau_{yz} a_{23} a_{33} + \tau_{zx} a_{33} a_{13}), \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \bar{\tau}_{xy} = & \sigma_x a_{11} a_{12} + \sigma_y a_{21} a_{22} + \sigma_z a_{31} a_{32} + \tau_{xy} (a_{11} a_{22} + a_{21} a_{12}) + \\ & + \tau_{yz} (a_{21} a_{32} + a_{31} a_{22}) + \tau_{zx} (a_{31} a_{12} + a_{11} a_{32}), \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} \bar{\tau}_{yz} = & \sigma_x a_{12} a_{13} + \sigma_y a_{22} a_{23} + \sigma_z a_{32} a_{33} + \tau_{xy} (a_{12} a_{23} + a_{22} a_{13}) + \\ & + \tau_{yz} (a_{22} a_{33} + a_{32} a_{23}) + \tau_{zx} (a_{32} a_{13} + a_{12} a_{33}), \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} \bar{\tau}_{zx} = & \sigma_x a_{13} a_{11} + \sigma_y a_{23} a_{21} + \sigma_z a_{33} a_{31} + \tau_{xy} (a_{13} a_{21} + a_{23} a_{11}) + \\ & + \tau_{yz} (a_{23} a_{31} + a_{33} a_{21}) + \tau_{zx} (a_{33} a_{11} + a_{13} a_{31}). \end{aligned} \quad (13)$$

U tim su formulama koeficijenti  $a_{ij}$  kosinusi kutova između pripadnih osi koordinatnih sustava prema tabl. 1. Budući da se radi o ortogonalnoj transformaciji, kosinusi smjera povezani su ovim relacijama:

$$a_{11}^2 + a_{21}^2 + a_{31}^2 = a_{12}^2 + a_{22}^2 + a_{32}^2 = a_{13}^2 + a_{23}^2 + a_{33}^2 = 1, \quad (14)$$

$$\begin{aligned} a_{12} a_{13} + a_{22} a_{23} + a_{32} a_{33} = & a_{13} a_{11} + a_{23} a_{21} + a_{33} a_{31} = \\ = & a_{11} a_{12} + a_{21} a_{22} + a_{31} a_{32} = 0. \end{aligned} \quad (15)$$

Tablica 1  
KOSINUSI SMJERA MEĐU OSIMA DVAJU PRAVOKUTNIH KOORDINATNIH SUSTAVA  $x, y, z$ ,  $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$

	$\bar{x}$	$\bar{y}$	$\bar{z}$
$x$	$a_{11}$	$a_{12}$	$a_{13}$
$y$	$a_{21}$	$a_{22}$	$a_{23}$
$z$	$a_{31}$	$a_{32}$	$a_{33}$

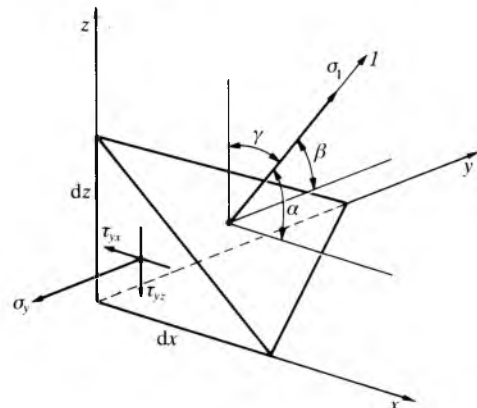
U svakoj točki napregnutog tijela postoji neka orijentacija osi  $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$  za koju tangencijalna naprezanja iščezavaju, a od tri normalna naprezanja dva imaju ekstremne vrijednosti. Te se osi nazivaju glavnim osima naprezanja i obično se označavaju brojkama 1, 2, 3. Glavnoj osi 1 pridruženo je maksimalno naprezanje  $\sigma_1$ , a osi 3 minimalno  $\sigma_3$ . Naprezanja  $\sigma_1, \sigma_2$  i  $\sigma_3$  glavna su naprezanja, a dogovorno se uzima da je  $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$ . Glavna se naprezanja određuju iz jednadžbe

$$\sigma^3 - \Theta \sigma^2 + H \sigma - \Lambda = 0, \quad (16)$$

gdje su  $\Theta = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z$ ,  $H = \sigma_x \sigma_y + \sigma_y \sigma_z + \sigma_z \sigma_x - (\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)$  i  $\Lambda = \sigma_x \sigma_y \sigma_z + 2 \tau_{xy} \tau_{yz} \tau_{zx} - \sigma_x \tau_{yz}^2 - \sigma_y \tau_{zx}^2 - \sigma_z \tau_{xy}^2$  invarijante tenzora naprezanja. Smjerovi glavnih osi naprezanja izračunavaju se iz jednadžbi ravnoteže tetraedra za pravce  $x$  i  $y$  (sl. 3):

$$\sigma_1 a_{11} = \sigma_x a_{11} + \tau_{yx} a_{21} + \tau_{zx} a_{31}, \quad (17)$$

$$\sigma_1 a_{21} = \tau_{xy} a_{11} + \sigma_y a_{21} + \tau_{zy} a_{31}. \quad (18)$$



Sl. 3. Glavno naprezanje  $\sigma_1$  leži prema osima  $x, y$  i  $z$  pod kutovima  $\alpha, \beta$  i  $\gamma$  kojih su kosinusi smjera  $\cos \alpha = a_{11}$ ,  $\cos \beta = a_{21}$  i  $\cos \gamma = a_{31}$

Te jednadžbe i jednadžba  $a_{11}^2 + a_{21}^2 + a_{31}^2 = 1$  jesu tri jednadžbe za nepoznate kosinuse smjera osi 1 prema osima  $x, y, z$ . Analogno se određuju i smjerovi osi 2 prema osima  $x, y, z$ , dok se preostali kosinusi smjera osi 3 izračunavaju prema (15).

Ekstremne se vrijednosti tangencijalnih naprezanja nalaze u ravninama koje s glavnima zatvaraju kutove  $\pm 45^\circ$ . Ta su naprezanja

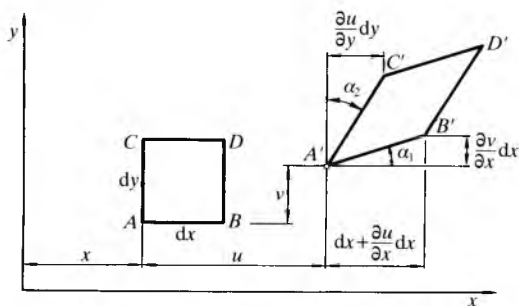
$$\tau_1 = \pm \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2}, \quad (19)$$

$$\tau_2 = \pm \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}, \quad (20)$$

$$\tau_3 = \pm \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}. \quad (21)$$

Promjena komponenata tenzora naprezanja pri zakretu koordinatnog sustava geometrijski se prikazuje pomoću Cauchyjeve plohe naprezanja, Laméova elipsoida ili pomoću Mohrove kružnice naprezanja.

**Deformacije.** Zbog djelovanja sila na čvrsto tijelo svaki će element obujma promijeniti položaj i oblik (sl. 4). Te promjene izražavaju pomaci, linijske i kutne deformacije te



Sl. 4. Translacija i deformacija elementa u ravnini  $xy$

rotacije. Veza između linijske deformacije u nekom pravcu i komponente pomaka u tom pravcu dobiva se promatranjem promjene beskonačno male dužine nastale zbog opterećenja. Tako će se dužina  $dx = \overline{AB}$  promijeniti u novu  $dx' = \overline{A'B'}$  približno za iznos  $(\partial u/\partial x)dx$ , zbog pomaka svih točaka dužine  $\overline{AB}$  u smjeru osi  $x$ . Linijska je deformacija tada

$$\epsilon_x = \frac{\overline{A'B'} - \overline{AB}}{\overline{AB}} = \frac{\partial u}{\partial x}. \quad (22)$$

Ta je veza dovoljno točna samo u teoriji malih deformacija, jer se u njoj zanemaruju članovi višeg reda. Kutna je deformacija u ravnini  $x, y$  uz isto zanemarenje:

$$\gamma_{xy} = \alpha_1 + \alpha_2 = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}. \quad (23)$$

Za sve tri osi i za sve tri ravnine koordinatnog sustava vrijede izrazi:

$$\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad (24)$$

$$\epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad (25)$$

$$\epsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}, \quad (26)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}, \quad (27)$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}, \quad (28)$$

$$\gamma_{zx} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}. \quad (29)$$

Tako definirane kutne deformacije pokazuju potpunu promjenu prvobitnog pravog kuta elementa. Ponekad se za kutnu deformaciju uzima samo polovica te promjene. Tada je  $\epsilon_{xy} = \gamma_{xy}/2$ ,  $\epsilon_{yz} = \gamma_{yz}/2$  i  $\epsilon_{zx} = \gamma_{zx}/2$ .

Rotacija elementa oko osi koordinatnog sustava izražava se srednjom vrijednošću zakreta stranica elementa obujma. Tako se stranica  $dx$  zakreće oko osi  $z$  za kut  $\partial v/\partial x$ , dok je zakret stranice  $dy$  oko iste osi suprotan i iznosi  $-\partial u/\partial y$ .

Srednja je vrijednost tih zakreta rotacija  $\omega_z = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right)$ .

Slično je sa zakretima oko osi  $x$  i  $y$ , pa sve tri rotacije iznose:

$$\omega_x = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right), \quad (30)$$

$$\omega_y = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right), \quad (31)$$

$$\omega_z = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right). \quad (32)$$

Linijske i kutne deformacije transformiraju se pri zakretu koordinatnog sustava pomoću formula sličnih onima za transformaciju naprezanja. Tako za transformaciju deformacije  $\bar{\epsilon}_x$  vrijedi da je

$$\bar{\epsilon}_x = \epsilon_x a_{11}^2 + \epsilon_y a_{21}^2 + \epsilon_z a_{31}^2 + \gamma_{xy} a_{11} a_{21} + \gamma_{yz} a_{21} a_{31} + \gamma_{zx} a_{31} a_{11}. \quad (33)$$

Taj se izraz razlikuje od izraza (8), koji vrijedi za transformaciju naprezanja, samo u tome što ovdje uz kutne deformacije ne stoji faktor 2, pa su linijske deformacije i polovice kutnih deformacija, slično kao i naprezanja, komponente tenzora drugog reda. Zato i deformacije imaju tri istaknuta pravca: 1, 2 i 3 (glavni pravci deformacija), kojima su kutne deformacije jednake nuli, a dvije linijske poprimaju ekstremne vrijednosti ( $\epsilon_1 > \epsilon_2 > \epsilon_3$ ,  $\epsilon_1 = \epsilon_{\max}$ ,  $\epsilon_3 = \epsilon_{\min}$ ). Prva invarijanta tenzora deformacija  $e = \epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3 = \epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z$  jedinična je promjena obujma u promatranoj točki tijela. Za izotropno se tijelo glavni pravci naprezanja poklapaju s glavnim pravcima deformacija.

Parcijalne derivacije pomaka (relativni pomaci) također su komponente tenzora drugog reda. Taj tenzor nije simetričan. Sastoji se od simetričnog dijela (tenzor deformacija) i antisimetričnoga koji sadrži rotacije, što se može prikazati zbrojem sljedećih matrica:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \epsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{zx} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \epsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{zx} & \frac{1}{2}\gamma_{yz} & \epsilon_z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{bmatrix} \quad (34)$$

Šest je komponenata deformacija potpuno određeno trima funkcijama pomaka  $u, v$  i  $w$ , pa se za deformacije ne može računati sa šest bilo kojih funkcija. Tih šest funkcija, da bile funkcije deformacija, moraju zadovoljiti uvjete kompatibilnosti ili kontinuiranosti. Uvjete kompatibilnosti postavio je B. de Saint-Venant i oni glase:

$$\frac{\partial^2 \epsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y}, \quad (35)$$

$$\frac{\partial^2 \epsilon_y}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_z}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial y \partial z}, \quad (36)$$

$$\frac{\partial^2 \epsilon_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_x}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{zx}}{\partial z \partial x}, \quad (37)$$

$$2 \frac{\partial^2 \epsilon_x}{\partial y \partial z} = \frac{\partial}{\partial x} \left( -\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right), \quad (38)$$

$$2 \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x \partial z} = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right), \quad (39)$$

$$2 \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right). \quad (40)$$

**Veza između naprezanja i deformacija.** U teoriji malih deformacija pretpostavlja se da je veza između naprezanja i deformacija linearna. Ako u neopterećenom tijelu nema ni naprezanja ni deformacija, tada općenito vrijede jednadžbe veze:

$$\sigma_x = C_{11} \varepsilon_x + C_{12} \varepsilon_y + C_{13} \varepsilon_z + C_{14} \gamma_{xy} + C_{15} \gamma_{yz} + C_{16} \gamma_{zx}, \quad (41)$$

$$\sigma_y = C_{21} \varepsilon_x + C_{22} \varepsilon_y + C_{23} \varepsilon_z + C_{24} \gamma_{xy} + C_{25} \gamma_{yz} + C_{26} \gamma_{zx}, \quad (42)$$

$$\sigma_z = C_{31} \varepsilon_x + C_{32} \varepsilon_y + C_{33} \varepsilon_z + C_{34} \gamma_{xy} + C_{35} \gamma_{yz} + C_{36} \gamma_{zx}, \quad (43)$$

$$\tau_{xy} = C_{41} \varepsilon_x + C_{42} \varepsilon_y + C_{43} \varepsilon_z + C_{44} \gamma_{xy} + C_{45} \gamma_{yz} + C_{46} \gamma_{zx}, \quad (44)$$

$$\tau_{yz} = C_{51} \varepsilon_x + C_{52} \varepsilon_y + C_{53} \varepsilon_z + C_{54} \gamma_{xy} + C_{55} \gamma_{yz} + C_{56} \gamma_{zx}, \quad (45)$$

$$\tau_{zx} = C_{61} \varepsilon_x + C_{62} \varepsilon_y + C_{63} \varepsilon_z + C_{64} \gamma_{xy} + C_{65} \gamma_{yz} + C_{66} \gamma_{zx}. \quad (46)$$

Te su jednadžbe poopćeni Hookeov zakon i u njima je od 36 koeficijenata  $C_{ij}$  samo 21 međusobno različit, jer vrijedi da je  $C_{ij} = C_{ji}$ . Koeficijenti  $C_{ij}$  ovise o mehaničkim konstantama materijala, a njihov broj ovisi o mehaničkim svojstvima tijela u različitim pravcima. Kad su ta svojstva u svim pravcima različita, materijal je anizotropan pa je za potpuno poznavanje materijala potrebna 21 konstanta. U posebnim slučajevima anizotropije (materijali s nekoliko ravnina simetrije elastičnih svojstava) broj se konstanta reducira, tako da za izotropan materijal ostaju samo dvije: modul elastičnosti  $E$  i Poissonov koeficijent  $\nu$ . Anizotropna tijela predmet su posebne teorije elastičnosti.

Za izotropne materijale vrijede jednadžbe Hookeova zakona:

$$\sigma_x = \frac{E}{1+\nu} \varepsilon_x + \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} e, \quad (47)$$

$$\sigma_y = \frac{E}{1+\nu} \varepsilon_y + \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} e, \quad (48)$$

$$\sigma_z = \frac{E}{1+\nu} \varepsilon_z + \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} e, \quad (49)$$

$$\tau_{xy} = \frac{E}{2(1+\nu)} \gamma_{xy}, \quad (50)$$

$$\tau_{yz} = \frac{E}{2(1+\nu)} \gamma_{yz}, \quad (51)$$

$$\tau_{zx} = \frac{E}{2(1+\nu)} \gamma_{zx}, \quad (52)$$

gdje je  $e = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z$ . U inženjerskim proračunima uvodi se kao konstanta materijala i modul smicanja  $G$ , dok su za teoriju elastičnosti pogodnije tzv. Laméove konstante:

$$\mu = G = \frac{E}{2(1+\nu)}, \quad (53)$$

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}. \quad (54)$$

### RJEŠAVANJE PROBLEMA TEORIJOM ELASTIČNOSTI

Tri jednadžbe ravnoteže, šest jednadžbi veza pomaka i deformacija te šest jednadžbi Hookeova zakona tvore 15 osnovnih jednadžbi s 15 nepoznanica. Nepoznanice su šest komponenata tenzora naprezanja ( $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}$ ), šest deformacija ( $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}$ ) i tri pomaka ( $u, v, w$ ). Osim osnovnih jednadžbi, deformacije moraju zadovoljiti i šest jednadžbi kompatibilnosti. Određivanje nepoznanica neposredno iz navedenih jednadžbi moguće je samo u jednostavnijim slučajevima. Općenito to nije moguće, pa se jednadžbe reduciraju na pogodniji sustav koji ovisi o tome

da li se kao osnovne nepoznanice odabiru pomaci (metoda pomaka) ili naprezanja (metoda sila).

U metodi pomaka preureduju se jednadžbe ravnoteže pomoću Hookeova zakona tako da se naprezanja izraze pomoću deformacija, a kako su deformacije povezane s pomacima pomoću parcijalnih derivacija, dobivaju se tri Laméove jednadžbe:

$$(\lambda + \mu) \frac{\partial e}{\partial x} + \nabla^2 u + f_x = 0, \quad (55)$$

$$(\lambda + \mu) \frac{\partial e}{\partial y} + \nabla^2 v + f_y = 0, \quad (56)$$

$$(\lambda + \mu) \frac{\partial e}{\partial z} + \nabla^2 w + f_z = 0, \quad (57)$$

Tako dobivene jednadžbe sadrže sve osnovne jednadžbe osim uvjeta kompatibilnosti koji se također moraju uzeti u obzir.

Kad se kao osnovne nepoznanice odaberu naprezanja, preureduju se uvjeti kompatibilnosti pomoću Hookeova zakona i jednadžbi ravnoteže u Beltrami-Michellove jednadžbe:

$$\nabla^2 \sigma_x + \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial^2 \Theta}{\partial x^2} = -\frac{\nu}{1-\nu} \left( \frac{\partial f_x}{\partial x} + \frac{\partial f_y}{\partial y} + \frac{\partial f_z}{\partial z} \right) - 2 \frac{\partial f_x}{\partial x}, \quad (58)$$

$$\nabla^2 \sigma_y + \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial^2 \Theta}{\partial y^2} = -\frac{\nu}{1-\nu} \left( \frac{\partial f_x}{\partial x} + \frac{\partial f_y}{\partial y} + \frac{\partial f_z}{\partial z} \right) - 2 \frac{\partial f_y}{\partial y}, \quad (59)$$

$$\nabla^2 \sigma_z + \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial^2 \Theta}{\partial z^2} = -\frac{\nu}{1-\nu} \left( \frac{\partial f_x}{\partial x} + \frac{\partial f_y}{\partial y} + \frac{\partial f_z}{\partial z} \right) - 2 \frac{\partial f_z}{\partial z}, \quad (60)$$

$$\nabla^2 \tau_{xy} + \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial^2 \Theta}{\partial x \partial y} = -\left( \frac{\partial f_y}{\partial x} + \frac{\partial f_x}{\partial y} \right), \quad (61)$$

$$\nabla^2 \tau_{yz} + \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial^2 \Theta}{\partial y \partial z} = -\left( \frac{\partial f_z}{\partial y} + \frac{\partial f_y}{\partial z} \right), \quad (62)$$

$$\nabla^2 \tau_{zx} + \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial^2 \Theta}{\partial z \partial x} = -\left( \frac{\partial f_x}{\partial z} + \frac{\partial f_z}{\partial x} \right). \quad (63)$$

Za izvod Beltrami-Michellovih jednadžbi upotrijebljeni su uvjeti ravnoteže samo u deriviranom obliku, pa se oni moraju posebno zadovoljiti.

U većini tehničkih problema obujamne su sile konstantne ili se mogu zanemariti. Tada su Laméove i Beltrami-Michellove jednadžbe jednostavnije i iz njih se mogu pronaći opća rješenja. Pomaci, deformacije i naprezanja tada su biharmonijske funkcije, a prve invarijante naprezanja i deformacija  $\Theta$  i  $e$  harmonijske funkcije.

Posebna rješenja za naprezanja, pomake i deformacije ovise o rubnim uvjetima: o zadanim silama i pomacima na površini tijela. Rješenja moraju biti takva da dobivene funkcije imaju na određenim mjestima zadane vrijednosti. Zadovoljavanje rubnih uvjeta osnovna je teškoća u rješavanju pojedinih zadataka, tako da se često pribjegava približnim numeričkim postupcima (npr. konačne diferencije, metoda konačnih elemenata) ili se problem rješava eksperimentalno. Bilo kojim putem dobiveno rješenje, ono je jedino, što se u teoriji elastičnosti posebno dokazuje. Zbog linearne veze između naprezanja, deformacija i opterećenja moguće je pri rješavanju problema primijeniti princip superpozicije, prema kojem se naprezanja ili deformacije za dva različita opterećenja mogu zbrojiti kad ta opterećenja djeluju istodobno. Princip superpozicije omogućuje rješavanje nekih složenih slučajeva.

**Energija deformiranog elastičnog tijela.** Čvrsto se tijelo deformira zbog djelovanja vanjskih sila. Ako se pretpostavi polagano opterećivanje tijela uz konstantnu temperaturu, sav će rad vanjskih sila prijeći u tzv. energiju deformiranja. Gustoća te energije može se izračunati pomoću naprezanja, pomoću deformacija ili mješovito, prema izrazima:

$$U_0 = \frac{1}{2E} \left[ \sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2 - 2\nu(\sigma_x \sigma_y + \sigma_y \sigma_z + \right.$$

$$+ \sigma_x \epsilon_x + 2(1 + \nu)(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2) \Big], \quad (64)$$

$$U_0 = \frac{E}{2(1 + \nu)} \left[ \epsilon_x^2 + \epsilon_y^2 + \epsilon_z^2 + \frac{\nu}{1 - 2\nu} (\epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z)^2 + \frac{1}{2} (\gamma_{xy}^2 + \gamma_{yz}^2 + \gamma_{zx}^2) \right], \quad (65)$$

$$U_0 = \frac{1}{2} (\sigma_x \epsilon_x + \sigma_y \epsilon_y + \sigma_z \epsilon_z + \tau_{xy} \gamma_{xy} + \tau_{yz} \gamma_{yz} + \tau_{zx} \gamma_{zx}). \quad (66)$$

Energija deformiranja  $U$  sadrži dio koji se odnosi na energiju promjene obujma  $U_h$  (dilatacijska ili hidrostatička energija) i dio koji se odnosi na promjenu oblika  $U_d$  (distorzijska energija). Ta dva dijela obično se izražavaju pomoću glavnih naprezanja, a njihove su gustoće:

$$U_{0h} = \frac{1 - 2\nu}{6} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2, \quad (67)$$

$$U_{0d} = \frac{1 + \nu}{6E} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2], \quad (68)$$

Ukupna energija deformiranja određuje se integriranjem po obujmu tijela, pa je

$$U = \int_V U_0 dV. \quad (69)$$

To je potencijalna energija koju sadrži deformirano tijelo. Vanjske sile koje djeluju na deformirano tijelo imaju s obzirom na stanje prije deformiranja također određenu energiju. To je potencijalna energija ili energija položaja, a iznos joj je jednak, samo suprotna predznaka, radu koji bi sile obavile vraćanjem tijela u nedeformirano stanje bez promjene iznosa sile. Taj rad vanjskih površinskih i obujamnih sila iznosi:

$$W = \int_{A_1} (F_x u + F_y v + F_z w) dA + \int_V (f_x u + f_y v + f_z w) dV, \quad (70)$$

gdje je  $A_1$  površina tijela na kojoj nisu zadani pomaci, a  $V$  obujam. Energija položaja sila zajedno s energijom deformiranja tvori ukupnu potencijalnu energiju linearno elastičnog tijela:

$$\Pi = U - W, \quad (71)$$

koja za deformirano tijelo u stabilnoj ravnoteži ima minimum. Na tome se osniva princip minimuma potencijalne energije prema kojemu će od svih mogućih pomaka koji zadovoljavaju uvjete kompatibilnosti i zadane rubne uvjete zadovoljiti i uvjete ravnoteže samo oni pomaci za koje potencijalna energija bude imala minimum. To znači da se pri varijaciji pomaka neće promijeniti potencijalna energija,  $\delta \Pi = 0$ .

Slično potencijalnoj energiji  $\Pi$  definirana je i komplementarna energija  $\Pi^*$ , koja je određena uz pretpostavku da su pomaci konstantni, a da se sile mijenjaju. Za linearno elastično tijelo energija je deformiranja jednaka njezinoj komplementarnoj energiji, dok komplementarnu energiju imaju samo površinske sile na dijelovima površine tijela  $A_2$  gdje su zadani pomaci. Komplementarna energija obujamnih sila jednaka je nuli, tako da je  $\Pi^* = U - W^*$ , gdje je

$$W^* = \int_{A_2} (F_x u + F_y v + F_z w) dA. \quad (72)$$

I komplementarna energija deformiranog tijela u stacionarnom stanju ima minimum, a prema principu minimuma komplementarne energije od svih će naprezanja koja zadovoljavaju uvjete ravnoteže i zadane rubne uvjete zadovoljiti uvjete kompatibilnosti samo ona naprezanja za koja komplementarna energija ima minimum. Pri varijaciji naprezanja i površinskih sila, potencijalna se energija ne mijenja, tj.  $\delta \Pi^* = 0$ .

Ta su dva važna varijacijska principa temelji niza energetskih metoda kao što su Rayleigh-Ritzova, Galerkinova, numerička metoda konačnih elemenata i dr.

**Osnovne jednadžbe u tenzorskom obilježavanju.** Sustavi jednadžbi teorije elastičnosti mnogo su jednostavniji ako se

umjesto komponenta upotrijebi tenzorsko ili indeksno zapisivanje. U klasičnoj teoriji elastičnosti gotovo se sve jednadžbe izvede u jednome od pravokutnih koordinatnih sustava, pa se većinom upotrebljavaju Kartezijevi tenzori.

Tenzor naprezanja  $\sigma_{ij}$ , koji ima komponente  $\sigma_{11} = \sigma_x$ ,  $\sigma_{22} = \sigma_y$ ,  $\sigma_{33} = \sigma_z$ ,  $\sigma_{12} = \tau_{xy}$ ,  $\sigma_{23} = \tau_{yz}$  i  $\sigma_{31} = \tau_{zx}$ , simetričan je jer je  $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$ , a indeksi  $i$  i  $j$  mijenjaju se od 1 do 3. Uz takvo označavanje i uz uobičajenu konvenciju o indeksnom zapisivanju, te uz promjenu indeksa  $i, j = 1, 2, 3$ , jednadžbe su ravnoteže:

$$\sigma_{ij,j} + f_i = 0. \quad (73)$$

Transformacija tenzora naprezanja određena je izrazom

$$\bar{\sigma}_{ij} = a_{ik} a_{jl} \sigma_{kl}, \quad (74)$$

gdje su  $a_{ik}$  i  $a_{jl}$  koeficijenti kosinusa smjera kutova među osima, a  $k, l = 1, 2, 3$ .

Vektor pomaka  $u_i$  ima tri komponente:  $u_1 = u$ ,  $u_2 = v$  i  $u_3 = w$ , a tenzor deformacija  $\epsilon_{ij}$  šest komponentata:  $\epsilon_{11} = \epsilon_x$ ,  $\epsilon_{22} = \epsilon_y$ ,  $\epsilon_{33} = \epsilon_z$ ,  $\epsilon_{12} = \frac{1}{2} \gamma_{xy}$ ,  $\epsilon_{23} = \frac{1}{2} \gamma_{yz}$  i  $\epsilon_{31} = \frac{1}{2} \gamma_{zx}$ . I tu vrijedi da je  $\epsilon_{ij} = \epsilon_{ji}$ . Deformacije su s pomacima vezane jednadžbama:

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}), \quad (75)$$

a uvjeti kompatibilnosti u indeksnom zapisivanju imaju oblik

$$\epsilon_{ik,jj} - \epsilon_{jk,ij} + \epsilon_{ji,ik} - \epsilon_{ij,jk} = 0. \quad (76)$$

U tom obliku uvjeti kompatibilnosti imaju prividno 9 komponentnih jednadžbi, no samo ih je 6 međusobno nezavisnih.

Šest jednadžbi Hookeova zakona glase:

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \epsilon_{kl}. \quad (77)$$

Koeficijenti  $C_{ijkl}$  tvore tenzor četvrtog reda sa 81 komponentom, koji je simetričan s obzirom na parove indeksa ( $C_{ijkl} = C_{klij}$ ) i unutar parova ( $C_{ijkl} = C_{jikl} = C_{jilk} = C_{ilkj}$ ), tako da linearno elastičan anizotropni materijal ima samo 21 koeficijent. Prema pravilu o transformaciji tenzora četvrtog reda bit će

$$\bar{C}_{ijkl} = a_{im} a_{jn} a_{kp} a_{lq} C_{mnpq}. \quad (78)$$

Za koeficijente  $m, n, p$  i  $q$  također vrijedi da poprimaju vrijednosti 1, 2 i 3. Izotropni materijal ima samo dvije konstante, npr. Laméove  $\lambda$  i  $\mu$ , te je Hookeov zakon takva materijala:

$$\sigma_{ij} = 2\mu \epsilon_{ij} + \lambda \epsilon_{kk} \delta_{ij}, \quad (79)$$

gdje je  $\delta_{ij}$  Kroneckerov tenzor kojega su komponente  $\delta_{ij} = 1$  za  $i = j$  te  $\delta_{ij} = 0$  za  $i \neq j$ . U tom je izrazu  $\epsilon_{kk} \delta_{ij}$  prva invarijanta deformacija.

Jednakim izvodom kao i pri komponentnom izražavanju reduciraju se jednadžbe ravnoteže, jednadžbe veza deformacija i pomaka te jednadžbe Hookeova zakona na Laméove jednadžbe:

$$\mu \nabla^2 u_i + (\lambda + \mu) e_{,i} + f_i = 0 \quad (80)$$

i na Beltrami-Michellove jednadžbe:

$$\nabla^2 \sigma_{ik} + \frac{1}{1 + \nu} \Theta_{,ik} = -\frac{\nu}{1 - \nu} \delta_{ik} f_{i,j} - (f_{i,k} + f_{k,i}). \quad (81)$$

Tenzorski oblici gustoće energije deformacije, izraženi samo pomoću naprezanja ili samo pomoću deformacija ili mješovito, jesu:

$$U_0 = -\frac{\nu}{2E} \Theta^2 + \frac{1 + \nu}{2E} \sigma_{ij} \sigma_{ij}, \quad (82)$$

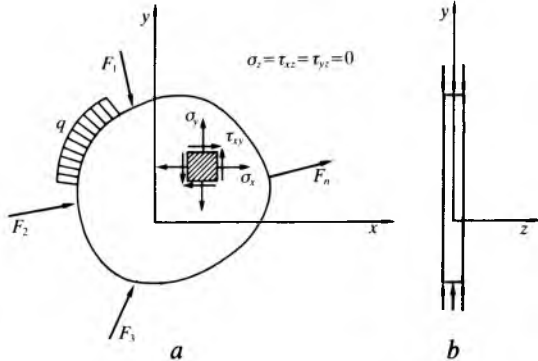
$$U_0 = \frac{\nu E}{2(1 + \nu)(1 - 2\nu)} e^2 + \frac{E}{2(1 + \nu)} \epsilon_{ij} \epsilon_{ij}, \quad (83)$$

$$U_0 = \frac{1}{2} \sigma_{ij} \epsilon_{ij}. \quad (84)$$



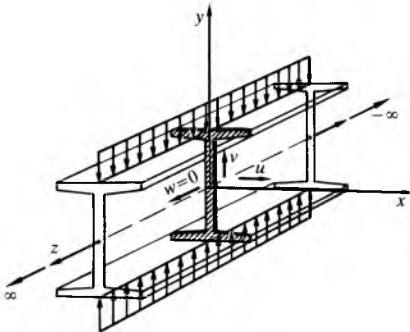
**Ravninski problemi teorije elastičnosti.** Dio problema teorije elastičnosti može se na osnovi fizikalnih činjenica i iskustvenih dokaza svesti na matematički dvodimenzijiski problem. To olakšava traženje rješenja, a dobiveni se rezultati neznatno razlikuju od onih koji bi se dobili primjenom stroge teorije.

Prema pretpostavkama razlikuju se dva ravninska stanja: *ravninsko naprezanje* i *ravninska deformacija*. Ako je tanka ploča opterećena silama po konturi, te ako te sile djeluju paralelno s ravninom ploče  $xy$  i jednoliko su raspodijeljene po debljini ploče (sl. 5), može se pretpostaviti da su naprezanja  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  i  $\tau_{xy}$  u cijeloj ploči jednaka nuli i da su istodobno  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  i  $\tau_{xy}$  funkcije dviju koordinata  $x$  i  $y$ . Prema Hookeovu zakonu četiri su deformacije  $\epsilon_x$ ,  $\epsilon_y$ ,  $\epsilon_z$  i  $\gamma_{xy}$  različite od nule, sve su one funkcije od  $x$  i  $y$ , a sva tri pomaka mogu biti različita od nule.



Sl. 5. Ravninsko stanje naprezanja uspostavlja se u tankoj ploči opterećenoj po obodu silama (a) koje su jednoliko raspodijeljene po debljini ploče (b)

Ravninska deformacija može nastati u prizmatičnu tijelu vrlo velike duljine (sl. 6) u pravcu osi  $z$  s obzirom na poprečne dimenzije tijela u ravnini  $xy$ . Pri opterećenju u ravnini  $xy$  silama koje su konstantne uzduž tijela, svi su presjeci tijela okomito na os  $z$  jednako napregnuti. Tada se pretpostavlja da je uzdužni pomak  $w=0$ , a da su u ravnini  $xy$  pomaci funkcije samo od  $x$  i  $y$ , pa je  $u=u(x,y)$ ,  $v=v(x,y)$ . Uzduž osi  $z$  nema deformacija, tj.  $\epsilon_z = \gamma_{yz} = \gamma_{zx} = 0$ , a preostale tri deformacije,  $\epsilon_x$ ,  $\epsilon_y$  i  $\gamma_{xy}$  također su funkcije samo koordinata  $x$  i  $y$ .



Sl. 6. Beskonačno dugo prizmatično tijelo, opterećeno uzdužno konstantnim silama, ima u svakom presjeku okomitom na uzdužnu os jednaka ravninska stanja deformacija

Prema Hookeovu zakonu bit će tada naprezanja  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$ ,  $\sigma_z$  i  $\tau_{xy}$  funkcije od  $x$ ,  $y$ , a tangencijalna su naprezanja  $\tau_{yz}$  i  $\tau_{zx}$  jednaka nuli.

Jednadžbe ravninske teorije elastičnosti reduciraju se samo na jednu jednadžbu uvođenjem Airyjeve funkcije naprezanja  $\Phi(x,y)$  takve da je

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} - \varphi, \quad (85)$$

$$\sigma_y = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} - \varphi, \quad (86)$$

$$\tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y}. \quad (87)$$

Naprezanja prema tim derivacijama zadovoljavaju uvjete ravnoteže, a uvjet kompatibilnosti, izražen naprezanjem i, dalje, Airyjevom funkcijom, dobiva oblik

$$\nabla^4 \Phi = C \nabla^2 \varphi. \quad (88)$$

Konstanta  $C$  iznosi:

$$C = 1 - \nu \quad \text{za ravninsko naprezanje,} \quad (89a)$$

$$C = \frac{1 - 2\nu}{1 - \nu} \quad \text{za ravninsku deformaciju.} \quad (89b)$$

Taj oblik uvjeta kompatibilnosti izveden je s pretpostavkom da su obujamne sile konzervativne, te da za njih postoji takva

funkcija  $\varphi(x,y)$  da je  $\vec{f} = \nabla \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \vec{j}$ , odnosno da je

$$f_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \quad \text{i} \quad f_y = \frac{\partial \varphi}{\partial y}. \quad \text{Gotovo u svim inženjerskim problemima}$$

obujamne se sile zanemaruju (npr. vlastita težina tijela) ili su konstantne, tako da je  $\nabla^2 \varphi = 0$ , pa je

$$\nabla^4 \Phi = 0. \quad (90)$$

Prema tome, Airyjeva je funkcija za takve slučajeve biharmonijska. Ona se najčešće pretpostavlja u obliku polinoma, pomoću trigonometrijskih i hiperbolnih funkcija ili pomoću dviju funkcija kompleksne varijable.

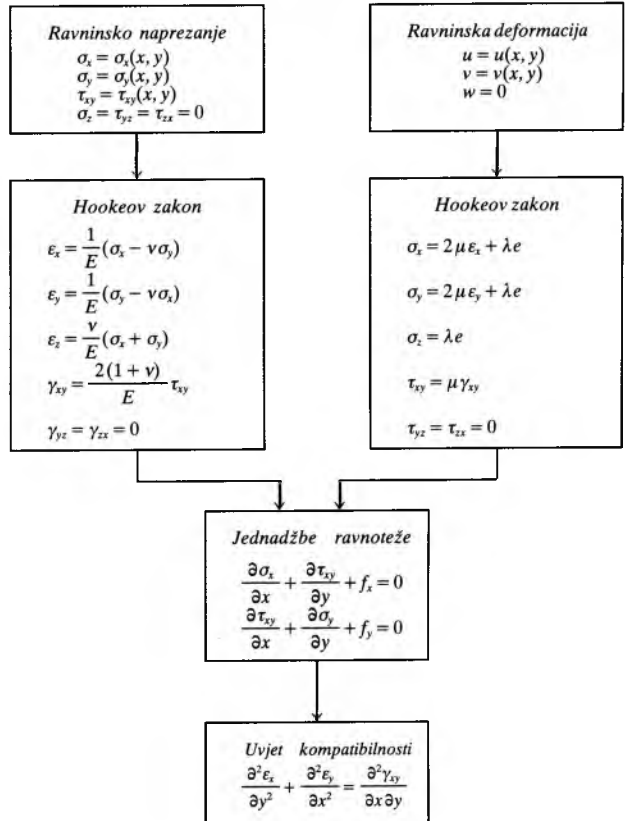
Svaki polinom trećeg reda i mješoviti članovi  $x^3y$  i  $y^3x$  četvrtog reda automatski su biharmonijska funkcija. Za Airyjevu funkciju dolaze u obzir i polinomi višeg reda ako im koeficijenti  $A_{ij}$  zadovoljavaju uvjetne jednadžbe:

$$(m+2)(m+1)m(m-1)A_{m+2,n-2} + 2m(m-1)n(n-1)A_{mn} + (n+2)(n+1)n(n-1)A_{m-2,n+2} = 0, \quad (91)$$

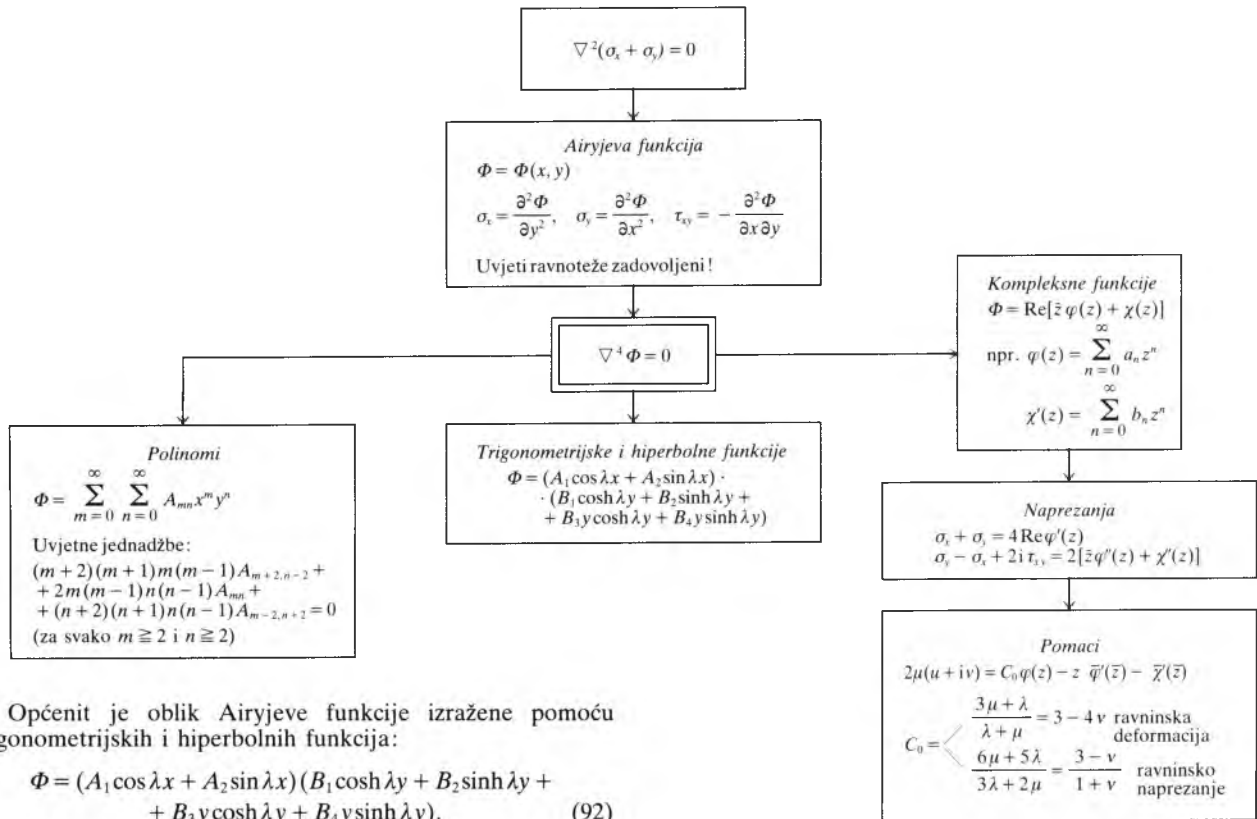
gdje je  $m \geq 2$  i  $n \geq 2$ . Koeficijenti polinoma  $A_{ij}$  određuju se iz rubnih uvjeta i uvjetnih jednadžbi.

Tablica 2

PREGLED JEDNADŽBI RAVNINSKE TEORIJE ELASTIČNOSTI



Tablica 3  
FUNKCIJA NAPREZANJA U RAVNINSKOJ TEORIJI ELASTIČNOSTI UZ ZANEMARENJE OBUJAMNIH SILA



Općenit je oblik Airyjeve funkcije izražene pomoću trigonometrijskih i hiperbolnih funkcija:

$$\Phi = (A_1 \cos \lambda x + A_2 \sin \lambda x)(B_1 \cosh \lambda y + B_2 \sinh \lambda y + B_3 y \cosh \lambda y + B_4 y \sinh \lambda y). \quad (92)$$

Tom se izrazu po potrebi dodaje isti oblik funkcije samo sa zamijenjenim varijablama  $x$  i  $y$  te s novim konstantama  $A, B$  i  $\lambda$ , a osim toga on se može proširiti i članovima polinoma.

Pomoću konjugirano kompleksnih varijabla  $z = x + iy$  i  $\bar{z} = x - iy$  i dviju funkcija  $\varphi(z)$  i  $\chi(z)$  dobiva se Airyjeva funkcija kao realni dio izraza:

$$\Phi = \text{Re}[\bar{z} \varphi(z) + \chi(z)], \quad (93)$$

pomoću koje se postavljaju tri jednačbe za pomake i naprezanja:

$$2\mu(u + iv) = C_0 \varphi(z) - z \bar{\varphi}'(\bar{z}) - \bar{\chi}'(\bar{z}), \quad (94)$$

$$\sigma_x + \sigma_y = 4 \text{Re} \varphi'(z), \quad (95)$$

$$\sigma_y - \sigma_x + 2i \tau_{xy} = 2[\bar{z} \varphi''(z) + \chi''(z)]. \quad (96)$$

U izrazu za pomake konstanta  $C_0$  ovisi o ravninskom stanju:

$$C_0 = \frac{3 - \nu}{1 + \nu} \quad \text{za ravninsko naprezanje}, \quad (97a)$$

$$C_0 = 3 - 4\nu \quad \text{za ravninsku deformaciju}. \quad (97b)$$

Pronalaženje pogodnih funkcija  $\varphi(z)$  i  $\chi(z)$  koje zadovoljavaju rubne uvjete središnji je problem koji se danas većinom rješava konformnim preslikavanjem i metodama N. I. Muskhelišvilija i G. V. Kolosova. Pregled jednačbi ravninske teorije elastičnosti nalazi se u tabl. 2 i 3.

**Općenita rješenja prostornih problema.** Polazne jednačbe za rješavanje prostornih problema jesu Laméove i Beltrami-Michellove jednačbe. I jedne i druge reduciraju se na sažetije izraze u kojima su nepoznanice vektor pomaka  $\vec{\delta} = u\vec{i} + v\vec{j} + w\vec{k}$  i tenzor naprezanja  $\sigma_{ij}$ , već prema tome radi li se o metodi pomaka ili metodi sila.

Preuređenjem Laméovih jednačbi dobiva se vektorska jednačba

$$(\lambda + \mu) \nabla(\nabla \cdot \vec{\delta}) + \mu \nabla^2 \vec{\delta} + \vec{f} = \vec{0}, \quad (98)$$

za koju, kad nema obujamnih sila, rješenje glasi:

$$\vec{\delta} = \nabla \varphi + \nabla \times \vec{\psi}. \quad (99)$$

Funkcije  $\varphi = \varphi(x, y, z)$  i  $\vec{\psi} = \vec{i} \psi_x(x, y, z) + \vec{j} \psi_y(x, y, z) + \vec{k} \psi_z(x, y, z)$  najčešće se odabiru među biharmonijskim funkcijama, pa je općenito potrebno pronaći četiri takve funkcije. Kad je moguće zadovoljiti rubne uvjete samo funkcijom  $\varphi(x, y, z)$  (Laméov potencijal), komponente su pomaka  $u = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, v = \frac{\partial \varphi}{\partial y}$  i  $w = \frac{\partial \varphi}{\partial z}$ . Rješenje za  $\vec{\delta}$  može se naći i pomoću tzv. Galerkinova vektora  $\vec{G}$ . Za vektor pomaka tada vrijedi izraz:

$$\vec{\delta} = 2(1 - \nu) \nabla^2 \vec{G} - \nabla(\nabla \cdot \vec{G}), \quad (100)$$

gdje su komponente vektorske funkcije  $\vec{G}$  tri biharmonijske funkcije  $G_x = G_x(x, y, z), G_y = G_y(x, y, z)$  i  $G_z = G_z(x, y, z)$ . Osnosimetrični problemi mogu se riješiti samo pomoću jedne od tih komponenata (npr.  $G_z$ ), u kojima biharmonijska funkcija ima samo dvije varijable,  $r$  i  $z$  (Loveova funkcija). Umjesto pomoću biharmonijskih funkcija rješenje se može tražiti i pomoću harmonijskih (Papkovich-Neuberovo rješenje)  $\vec{A} = A_x \vec{i} + A_y \vec{j} + A_z \vec{k}$  i  $A_0$ . Sve su to funkcije varijabla  $x, y$  i  $z$ , a rješenje za vektor pomaka glasi:

$$\vec{\delta} = \vec{A} - \nabla \left[ A_0 + \frac{\vec{A} \cdot \vec{r}}{4(1 - \nu)} \right]. \quad (101)$$

U tom je rješenju  $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ .

U drugom se pristupu, kad se kao osnovne nepoznanice odaberu naprezanja, traži šest funkcija naprezanja koje su komponente simetričnog tenzora drugog reda. Matrica tih funkcija, u kojoj je  $\Phi_{ij} = \Phi_{ji}$ , glasi:

$$[\Phi] = \begin{bmatrix} \Phi_x & \Phi_{yx} & \Phi_{zx} \\ \Phi_{xy} & \Phi_y & \Phi_{zy} \\ \Phi_{xz} & \Phi_{yz} & \Phi_z \end{bmatrix}. \quad (102)$$



Dijagonalni elementi te matrice daju naprezanja pomoću triju funkcija (Maxwellove funkcije), a naprezanja zadovoljavaju uvjete ravnoteže ako je

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \Phi_y}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \Phi_z}{\partial y^2}, \quad (103)$$

$$\sigma_y = \frac{\partial^2 \Phi_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi_x}{\partial z^2}, \quad (104)$$

$$\sigma_z = \frac{\partial^2 \Phi_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi_y}{\partial x^2}, \quad (105)$$

$$\tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \Phi_z}{\partial x \partial y}, \quad (106)$$

$$\tau_{yz} = -\frac{\partial^2 \Phi_x}{\partial y \partial z}, \quad (107)$$

$$\tau_{zx} = -\frac{\partial^2 \Phi_y}{\partial z \partial x}, \quad (108)$$

$$\sigma_x = -2 \frac{\partial^2 \Phi_{yz}}{\partial y \partial z}, \quad (109)$$

$$\sigma_y = -2 \frac{\partial^2 \Phi_{xz}}{\partial x \partial z}, \quad (110)$$

$$\sigma_z = -2 \frac{\partial^2 \Phi_{xy}}{\partial x \partial y}, \quad (111)$$

$$\tau_{xy} = \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial \Phi_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \Phi_{zx}}{\partial y} - \frac{\partial \Phi_{xy}}{\partial z} \right), \quad (112)$$

$$\tau_{yz} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \Phi_{zx}}{\partial y} + \frac{\partial \Phi_{xy}}{\partial z} - \frac{\partial \Phi_{yz}}{\partial x} \right), \quad (113)$$

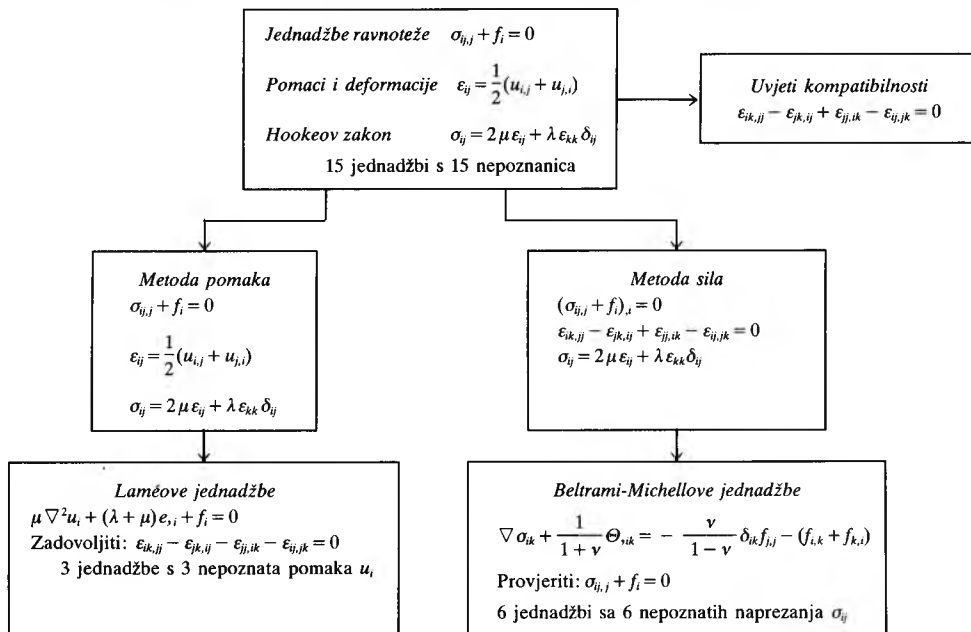
$$\tau_{zx} = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial \Phi_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial \Phi_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \Phi_{zx}}{\partial y} \right). \quad (114)$$

U ravninskim problemima dovoljna je samo funkcija  $\Phi_z = \Phi_z(x, y)$  dok je  $\Phi_x = \Phi_y = 0$ . Tada je  $\Phi_z$  Airyjeva funkcija naprezanja. Izvandijagonalni članovi (Morerine funkcije) zadovoljavaju uvjete ravnoteže ako je

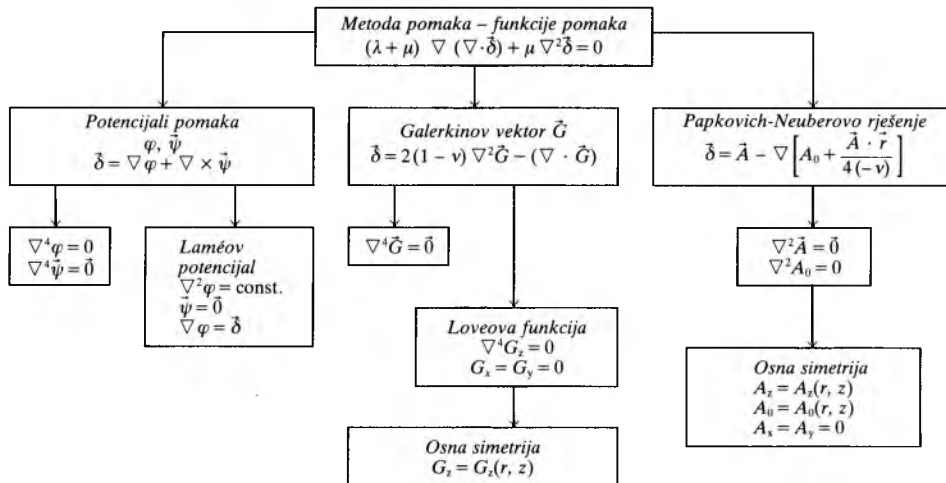
Sažeti način prikazivanja funkcija naprezanja pomoću tenzora funkcija  $\Phi_{ij}$  ima prednost u općoj teoriji elastičnosti prostornih problema. Za praktičnu su primjenu važna tri navedena posebna slučaja: za prostorne zadatke Maxwellove i Morerine funkcije, a za ravninske Airyjeva funkcija naprezanja.

Pregled općih jednadžbi prostorne teorije elastičnosti i njihova opća rješenja nalaze se u tabl. 4 i 5.

Tablica 4  
PREGLED OPĆIH JEDNADŽBI PROSTORNE TEORIJE ELASTIČNOSTI

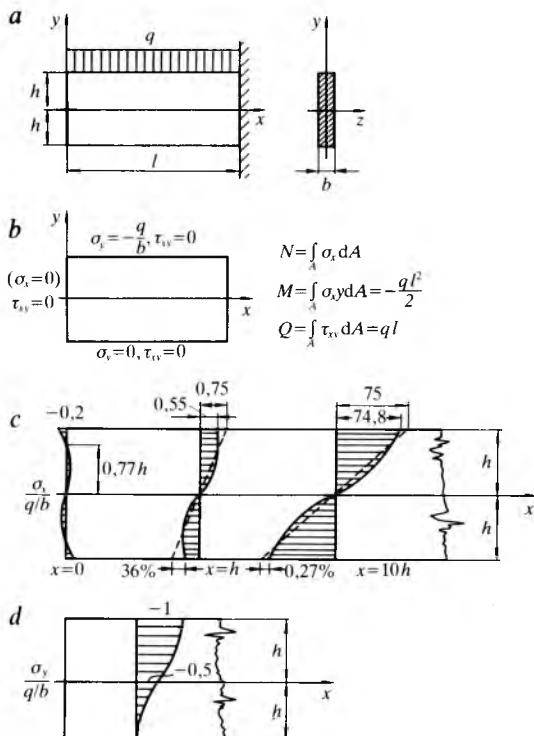


Tablica 5  
FUNKCIJE POMAKA U TEORIJI ELASTIČNOSTI KAD SE ZANEMARE OBUJAMNE SILE



Neki primjeri primjene teorije elastičnosti

**Jednstrano ukliještena pravokutna ploča.** Ploča pravokutnog presjeka opterećena je kontinuiranim opterećenjem (sl. 7a). Rubni se uvjeti mogu zadovoljiti samo integralno (sl. 7b), pa na slobodnom kraju nije moguće zadovoljiti uvjet da je  $\sigma_x = 0$ . Normalno naprezanje nije linearno raspodijeljeno (sl. 7c), ali je odstupanje od linearne raspodjele to manje što je konzola dulja. Tako na mjestu  $x = 10h$  normalno naprezanje  $\sigma_x$  odstupa od linearne raspodjele na gornjem (vlak) i donjem (tlak) rubu samo za 0,27%. Tlačno je naprezanje  $\sigma_y$  (sl. 7d) između uzdužnih slojeva ploče različito od nule. Na gornjem je rubu jednako opterećenju ( $\sigma_y = -q/b$ ) i ne ovisi o udaljenosti od ukliještenja.



Sl. 7. Jednstrano ukliještena pravokutna ploča (konzola) pravokutna presjeka: a opterećena kontinuiranim opterećenjem q, b rubni uvjeti, c raspodjela naprezanja  $\sigma_x$ , d raspodjela tlačnog naprezanja  $\sigma_y$

S obzirom na rubne uvjete (geometrijski oblik ploče, opterećenje, ukliještenje) taj se problem najbolje rješava Airyjevom funkcijom izraženom polinomom općega oblika:

$$\Phi = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} A_{mn} x^m y^n. \quad (115)$$

Stupanj se polinoma i koeficijenti  $A_{mn}$  određuju iz rubnih uvjeta i uvjetnih jednadžbi (91), tako da Airyjeva funkcija za ploču visine  $2h$  i debljine  $b$ , opterećenu kontinuiranim opterećenjem  $q$ , glasi:

$$\Phi = -\frac{q}{4b} x^2 - \frac{3q}{8bh} x^2 y + \frac{q}{8bh^3} x^2 y^3 + \frac{q}{20bh} y^3 - \frac{q}{40bh^3} y^5. \quad (116)$$

Ostali su koeficijenti jednaki nuli. Deriviranjem Airyjeve funkcije dobivaju se naprezanja

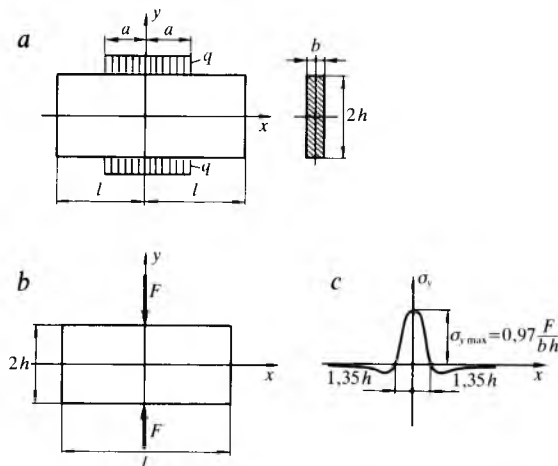
$$\sigma_x = \frac{q}{2I} \left( x^2 y - \frac{2}{3} y^3 + \frac{2}{5} h^2 y \right), \quad (117)$$

$$\sigma_y = -\frac{q}{2I} \left( \frac{2}{3} h^3 - \frac{1}{3} y^3 + h^2 y \right), \quad (118)$$

$$\tau_{xy} = \frac{q}{2I} (h^2 - y^2) x, \quad (119)$$

gdje je  $I = 2bh^3/3$  moment tromosti poprečnog presjeka ploče oko osi z.

**Pravokutna ploča opterećena simetričnim kontinuiranim opterećenjem** (sl. 8a). Naprezanja se određuju pomoću trigonometrijskih i hiperbolnih funkcija. Ako sile djeluju koncentrirano (sl. 8b), naprezanja se nadalje određuju graničnim prijelazom ( $a \rightarrow 0, l \rightarrow \infty$ ). Tada se maksimalno tlačno naprezanje nalazi u sredini ploče i iznosi  $0,97F/(bh)$ , gdje je  $F$  koncentrirana sila. Lijevo i desno po osi x naprezanje se naglo smanjuje.



Sl. 8. Simetrično opterećena pravokutna ploča: a djelomično opterećena kontinuiranim opterećenjem, b koncentriranim silama, c raspodjela naprezanja  $\sigma_y$

Opterećenje sa skokovitim promjenama, koje samo djelomično opterećuje pojedine rubove tijela, najlakše se matematički opisuje razvojem trigonometrijskih funkcija u Fourierov red. Za opterećenja asimetrična s obzirom na os y primjenjuje se razvoj u red kosinusnih funkcija, pa se za kontinuirano opterećenje  $q$  koje je konstantno na duljini  $2a$  dobiva:

$$q = \frac{C_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos \frac{n\pi}{l} x, \quad (120)$$

gdje je konstanta  $C_0 = 2aq/l$ , a koeficijenti se  $C_n$  reda izračunavaju prema izrazu

$$C_n = \frac{1}{l} \int_{-a}^a q \cos \frac{n\pi}{l} x dx = \frac{2q}{n\pi} \sin \frac{n\pi}{l} a \quad (n = 1, 2, \dots). \quad (121)$$

Airyjeva funkcija naprezanja tada je sastavljena također od trigonometrijskih funkcija, pa je

$$\Phi = (A_1 \cos \lambda x + A_2 \sin \lambda x) (B_1 \cosh \lambda y + B_2 \sinh \lambda y + B_3 y \cosh \lambda y + B_4 y \sinh \lambda y). \quad (122)$$

Zadovoljavanjem rubnih uvjeta određuju se konstante koje imaju ove vrijednosti:

$$A_1 = 1 \quad (123)$$

$$B_1 = \frac{4q}{n\pi b \lambda^2} \cdot \frac{\sinh \lambda h + \lambda h \cosh \lambda h}{\sinh 2\lambda h + 2\lambda h} \sin \lambda a, \quad (124)$$

$$B_4 = -\frac{4q}{n\pi b \lambda} \cdot \frac{\sinh \lambda h}{\sinh 2\lambda h + 2\lambda h} \sin \lambda a, \quad (125)$$

$$\lambda = \frac{n\pi}{l} \quad (n = 0, 1, 2, \dots), \quad (126)$$

$$A_2 = B_2 = B_3 = 0. \quad (127)$$

Naprezanja se određuju deriviranjem Airyjeve funkcije. U praktičnim problemima (stezni spojevi, čvrsti dosjedi i sl.) za čvrstoću je bitno tlačno naprezanje  $\sigma_y = \partial^2 \Phi / \partial x^2$ , koje se određuje izrazom:

$$\sigma_y = -\frac{qa}{lb} - \frac{4q}{\pi b} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \cos \left( \frac{n\pi}{l} x \right) \sin \left( \frac{n\pi}{l} a \right) A, \quad (128)$$

gdje je

$$A = \frac{\cosh\left(\frac{n\pi}{l}y\right)\left[\sinh\left(\frac{n\pi h}{l}\right) + \frac{n\pi h}{l}\cosh\left(\frac{n\pi h}{l}\right)\right]}{\sinh\left(\frac{2n\pi h}{l}\right) + \frac{2n\pi h}{l}}$$

$$= \frac{\frac{n\pi}{l}y\sinh\left(\frac{n\pi}{l}\right)\sinh\left(\frac{n\pi h}{l}\right)}{\sinh\left(\frac{2n\pi h}{l}\right) + \frac{2n\pi h}{l}}. \quad (129)$$

Kad je područje opterećenja vrlo maleno ( $a \rightarrow 0$ ), može se pretpostaviti da na ploču simetrično djeluju dvije koncentrirane sile  $F$ . Naprezanja se u pojedinim točkama određuju iz navedene Airyjeve funkcije uz  $a \ll l$  i  $l \rightarrow \infty$ .

**Osnosimetrični ravninski problem.** Tijela kojima su geometrija i opterećenje simetrični s obzirom na jednu os imaju s obzirom na tu os i simetričan raspored naprezanja (sl. 9). Takvi se problemi najlakše rješavaju u polarnim koordinatama  $r$  i  $\varphi$ . Naprezanja  $\sigma_r$  u radijalnom i  $\sigma_\varphi$  u cirkularnom pravcu glavna su naprezanja ( $\tau_{r\varphi} = 0$ ) i ovise samo o koordinati  $r$ . Tada je i Airyjeva funkcija naprezanja funkcija samo varijable  $r$ , te iz uvjeta  $\nabla^4 \Phi = 0$  slijedi diferencijalna jednadžba

$$\frac{d^4 \Phi}{dr^4} + \frac{2}{r} \frac{d^3 \Phi}{dr^3} - \frac{1}{r^2} \frac{d^2 \Phi}{dr^2} + \frac{1}{r^3} \frac{d\Phi}{dr} = 0, \quad (130)$$

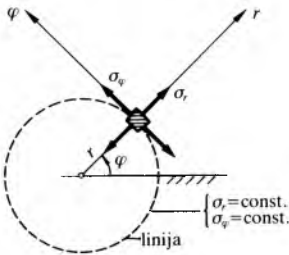
a njezino je rješenje

$$\Phi = C_1 + C_2 r^2 + C_3 \ln r + C_4 r^2 \ln r, \quad (131)$$

gdje su  $C_1$  do  $C_4$  integracijske konstante. Naprezanja su tada

$$\sigma_r = 2C_2 + C_3 \frac{1}{r^2} + C_4(2 \ln r + 1) \quad (132)$$

$$\sigma_\varphi = 2C_2 - C_3 \frac{1}{r^2} + C_4(2 \ln r + 3). \quad (133)$$



Sl. 9. Osnosimetrični ravninski primjer. Naprezanja  $\sigma_r$  i  $\sigma_\varphi$  ne ovise o kutu  $\varphi$ , a pomoću su točaka tijela samo po osi  $r$

Za pune su kružne diskove konstante  $C_3$  i  $C_4$  jednake nuli, jer bi inače naprezanja u središtu ( $r = 0$ ) bila beskonačna. Prema tome, naprezanja su u svim točkama kružnog diska, opterećenog osnosimetrično po obodu vlačnim ili tlačnim silama  $q_0$ , jednaka i iznose  $\sigma_r = \sigma_\varphi = 2C_2 = q_0$ . Kružni prstenovi u kojih je točka  $r = 0$  izvan konture tijela, imaju samo konstantu  $C_4$  jednaku nuli, što slijedi iz uvjeta da u cirkularnom pravcu nema pomaka ( $u_\varphi = 0$ ). Naprezanja su tada:

$$\sigma_r = 2C_2 + C_3 \frac{1}{r^2}, \quad (134)$$

$$\sigma_\varphi = 2C_2 - C_3 \frac{1}{r^2}. \quad (135)$$

Pomoću Hookeova zakona dobivaju se deformacije, a zatim integriranjem pomak u pravcu  $r$ :

$$u_r = \frac{1}{E} \left[ 2C_2(1 - \nu)r - C_3 \frac{1 + \nu}{r} \right]. \quad (136)$$

Konstante  $C_2$  i  $C_3$  određuju se iz rubnih uvjeta. Tako se za debelu cijev unutrašnjeg polumjera  $r_1$  i vanjskoga  $r_2$  na

koju djeluje unutrašnji tlak  $p_1$  i vanjski  $p_2$  (tzv. Laméova zadaća) konstante izračunavaju iz uvjeta da za  $r = r_1$  treba biti  $\sigma_r = -p_1$  a za  $r = r_2$ ,  $\sigma_r = -p_2$ , pa je

$$C_2 = \frac{1}{2} \frac{p_1 r_1^2 - p_2 r_2^2}{r_2^2 - r_1^2}, \quad (137)$$

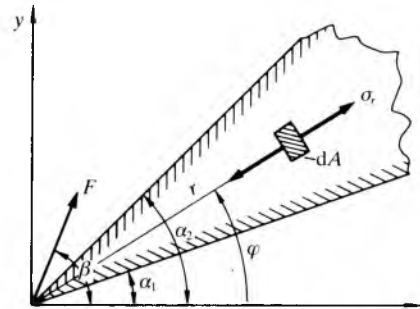
$$C_3 = \frac{r_1^2 r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} (p_2 - p_1). \quad (138)$$

Tada su pripadna naprezanja:

$$\sigma_r = \frac{p_1 r_1^2 - p_2 r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} + \frac{1}{r^2} \frac{r_1^2 r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} (p_2 - p_1), \quad (139)$$

$$\sigma_\varphi = \frac{p_1 r_1^2 - p_2 r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} - \frac{1}{r^2} \frac{r_1^2 r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} (p_2 - p_1). \quad (140)$$

**Sila na vrhu beskonačnog klina.** Beskonačno dug klin opterećen je na vrhu silom  $F$  (sl. 10). Tada je samo radijalno naprezanje  $\sigma_r$  različito od nule, dok su cirkularno naprezanje  $\sigma_\varphi$  i posmično  $\tau_{r\varphi}$  jednaki nuli.



Sl. 10. Beskonačni klin opterećen silom na vrhu

Promatranjem dijela klina određenog polarnom koordinatom  $r$  zaključuje se da Airyjeva funkcija naprezanja izražena pomoću polarnih koordinata  $r$  i  $\varphi$  glasi:

$$\Phi = C_1 r \varphi \sin \varphi + C_2 r \varphi \cos \varphi. \quad (141)$$

Konstante  $C_1$  i  $C_2$  određuju se iz uvjeta ravnoteže dijela klina. Naprezanja  $\sigma_\varphi$  i  $\tau_{r\varphi}$  jednaka su nuli, a radijalno naprezanje iznosi:

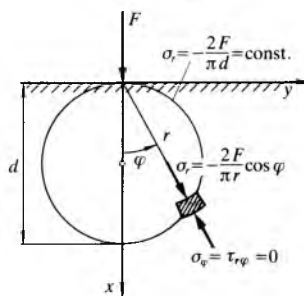
$$\sigma_r = \frac{F}{r(a^2 - bc)} [(b \sin \beta - a \cos \beta) \sin \varphi + (c \cos \beta - a \sin \beta) \cos \varphi]. \quad (142)$$

Konstante  $a$ ,  $b$  i  $c$  određene su geometrijskim oblikom klina:

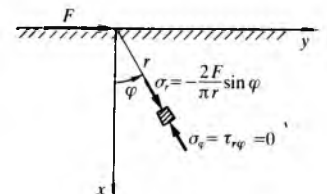
$$a = \frac{\sin^2 \alpha_2 - \sin^2 \alpha_1}{2}, \quad (143)$$

$$b = \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{2} + \frac{\sin \alpha_2 \cos \alpha_2 - \sin \alpha_1 \cos \alpha_1}{2}, \quad (144)$$

$$c = \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{2} - \frac{\sin \alpha_2 \cos \alpha_2 - \sin \alpha_1 \cos \alpha_1}{2}. \quad (145)$$



Sl. 11. Koncentrirana sila na poluravnini. Kružnice promjera  $d$  sa središtem na osi  $x$  linije su konstantnih radijalnih naprezanja  $\sigma_r$  (izobare); naprezanja  $\sigma_\varphi$  i  $\tau_{r\varphi}$  jednaka su nuli



Sl. 12. Cerruttijev problem: sila djeluje na rubu poluravnine paralelno s rubom

Rješenje se izvodi na osnovi pretpostavke da je debljina klina jednaka jedan i da je sila  $F$  jednolično raspodijeljena po debljini.

Poseban je slučaj kad koncentrirana sila djeluje okomito na rub poluravnine jedinične debljine (tzv. Flamantova zadaća sl. 11). Tada je  $\beta = 0$ ,  $\alpha_1 = -\pi/2$ ,  $\alpha_2 = \pi/2$ , tako da je  $a = 0$  i  $b = c = \pi/2$ . Naprezanje  $\sigma_r$  tada iznosi:

$$\sigma_r = -\frac{2F}{\pi r} \cos \varphi. \quad (146)$$

Ako je  $\beta = \pi/2$ ,  $\alpha_1 = -\pi/2$  i  $\alpha_2 = \pi/2$ , sila djeluje na rubu poluravnine, ali paralelno s njime (sl. 12). To je tzv. Cerrutijev problem. Jedino je radijalno naprezanje  $\sigma_r$  različito od nule i iznosi:

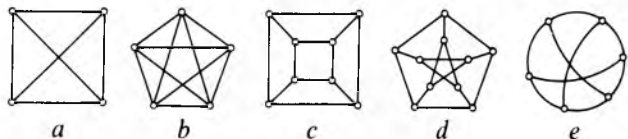
$$\sigma_r = -\frac{2F}{\pi r} \sin \varphi. \quad (147)$$

Rješenja za beskonačni klin i beskonačnu poluravninu primjenjuju se u nizu praktičnih problema kao što su zub zupčanika, konzolni trokutni nosač, dodir valjka s ravnom podlogom, željeznički kotač na tračnici itd. Premda su u takvim problemima tijela konačnih dimenzija, navedena rješenja zadovoljavaju inženjerske potrebe i s konačnim granicama.

LIT.: H. M. Westergaard, Theory of Elasticity and Plasticity. Harvard University Press, Cambridge, Massachusetts 1952. – Chi-Teh Wang, Applied Elasticity. McGraw-Hill, New York, Toronto, London 1953. – S. P. Timoshenko, History of Strength of Materials. McGraw-Hill, New York 1953. – S. Timošenko, J. N. Gudier, Teorija elastičnosti (prijevod s engleskog). Građevinska knjiga, Beograd 1962. – H. И. Мухомливили, Некоторые основные задачи математической теории упругости. Наука, Москва 1966. – Pei Chi Chou, N. J. Pagano, Elasticity. D. Van Nostrand, Princeton 1967. – R. Wm. Little, Elasticity. Prentice-Hall, Englewood Cliffs 1973. – B. Новацкий, Теория упругости (prijevod s poljskog). Мир, Москва 1975. – N. Naerlović, M. Plavšić, Teorija elastičnosti. Naučna knjiga, Beograd 1980. – Z. Kostrenčić, Teorija elastičnosti. Školska knjiga, Zagreb 1982. – D. Rašković, Teorija elastičnosti. Naučna knjiga, Beograd 1985.

S. Jecić

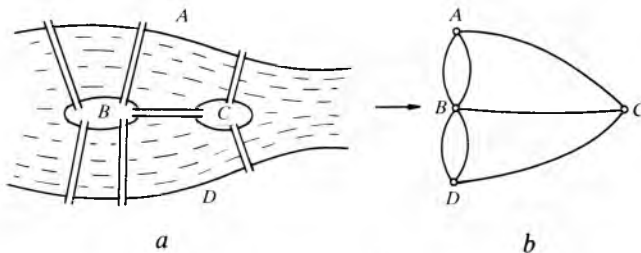
**TEORIJA GRAFOVA**, matematička disciplina iz područja diskretne i kombinatorne matematike, kojoj je osnovna značajka geometrijski pristup u proučavanju apstraktnih modela. Grafovi su osnovni objekt proučavanja te teorije. Graf se, pojednostavnjeno rečeno, sastoji od vrhova i njihovih spojnica koje se zovu bridovi, a prikazuju se obično crtežom u ravnini (sl. 1).



Sl. 1. Neki jednostavni grafovi. a potpun graf s četiri vrha ( $K_4$ ), b potpun graf s pet vrhova ( $K_5$ ), c kubni graf ( $Q_3$ ), d Petersonov graf, e premoštena petlja

Suvremena teorija grafova najčešće se razvrstava u algebarsku, topološku (ili geometrijsku) i algoritamsku teoriju grafova, s primjenama. Algebarska se teorija grafova uglavnom bavi nalaženjem nekih invarijanata grafa algebarskog ili kombinatornog tipa, različitim prebrojavanjima na grafovima i sl., dok se topološka teorija grafova uglavnom bavi smještavanjima grafova u ravninu ili u koje druge plohe, zatim različitim obilascima grafova i sl. Mnogobrojne su primjene teorije grafova u matematici, npr. u algebri, teoriji vjerojatnosti i statistici, teoriji brojeva, topologiji itd., zatim u kemiji, fizici (npr. statističkoj mehanici), biologiji i medicini (osobito u genetici), tehnicima (napose u elektrotehnicima pri proučavanju električnih mreža), računarskim znanostima, ekonomiji, sociologiji, lingvistici i dr. Algoritamska se teorija grafova bavi nalaženjem efikasnih algoritama za rješavanje problema koji se mogu iskazati terminima teorije grafova.

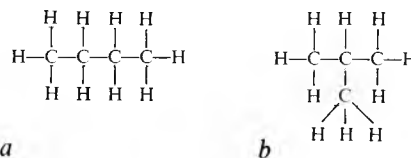
Početak se teorije grafova smatra rješenje problema mostova u Königsbergu. Taj problem glasi: Može li se šetnjom po Königsbergu svaki most prijeći samo jednom i vratiti se na početak šetnje? (sl. 2). Taj je problem riješio švicarski matematičar L. Euler (1707–1783) pokazavši da je takva šetnja nemoguća. Euler je promatrao pripadni graf (sl. 2b) u kojem vrhovi  $A, B, C$  i  $D$  predstavljaju otoke i obale, a spojnice među njima mostove. Pokazao je da na nekom grafu postoji šetnja koja započinje u nekom vrhu, prelazi svaki brid samo jednom i vraća se u početni vrh ako i samo ako je svaki vrh paran (tj. leži na parnom broju bridova). Budući da je svaki vrh grafa na sl. 2b neparan, takva je šetnja po Königsbergu nemoguća. Grafovi na kojima je takva šetnja moguća zovu se *Eulerovi grafovi*.



Sl. 2. Sedam mostova preko rijeke Pregel u Königsbergu (današnji Kaliningrad). a situacija, b pripadni graf

Neki od daljih problema koji su dali zamah teoriji grafova još u XVIII. i XIX. st. jesu: problem *osam kraljica* na šahovskoj ploči (može li se na šahovsku ploču postaviti osam kraljica tako da jedna drugu ne napada i, ako može, na koliko je to načina moguće), problem *puta oko svijeta*, problem *četiriju boja*, problem *transporta* i dr.

Sredinom XIX. st. G. Kirchhoff je proučavao električne mreže i sustave jednakdžbi koji opisuju struje i napone u takvim mrežama (tj. grafovima), te u njima tražio razapinjuća stabla pomoću kojih se dobivaju linearno nezavisne konture. U to je doba djelovao i A. Cayley, koji se bavio prebrojavanjima izomera zasićenih ugljikovodika ( $C_nH_{2n+2}$ , sl. 3), što je dovelo do problema prebrojavanja *stabala* u kojima je svaki atom vodika jednovalentan, a svaki atom ugljika četverovalentan. Opću metodu za takva prebrojavanja razvili su G. Pólya i dr. tek tridesetih godina XX. st.



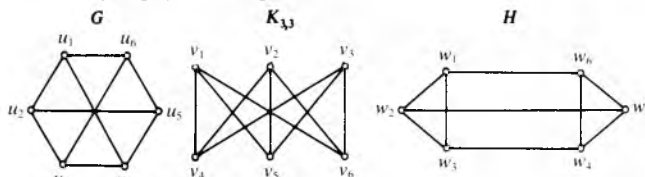
Sl. 3. Dva izomera zasićenog ugljikovodika  $C_4H_{10}$ . a n-butan, b izobutan

Prvu monografiju iz teorije grafova objavio je D. König (1936). Tu su već naznačeni neki od osnovnih pojmova u vezi s povezanošću, planarnošću, bojenjem, sparivanjem na grafovima itd. Najznačajniji zamah i procvat teorija grafova započinje u pedesetim godinama XX. st. Jedan je od bitnih razloga pojava i razvoj sve bržih i snažnijih elektroničkih računala koja su omogućila rješavanje mnogih praktičkih problema s mnoštvom proračuna. Takvi su problemi zahtijevali pronalazak efikasnih algoritama, a za to su pak bila potrebna dalja teorijska razmatranja.

**OSNOVNI POJMOVI TEORIJE GRAFOVA**

**Vrhovi i bridovi.** Graf  $G$  je uređena trojka  $G = (V(G), E(G), \varphi_G)$  koja se sastoji od nepraznog skupa  $V = V(G)$ , kojeg su elementi *vrhovi* od  $G$ , skupa  $E = E(G)$  disjunktanog sa  $V(G)$ , kojeg su elementi *bridovi* od  $G$  i *funkcije incidencije*  $\varphi_G$ , koja svakom bridu od  $G$  pridružuje neuređen par (ne nužno različitih) vrhova od  $G$ . Katkad se piše skraćeno  $G = (V(G), E(G))$  ili  $G = (V, E)$ .

Ako je  $e \in E(G)$ , a  $u, v \in V(G)$  tako da je  $\varphi_G(e) = uv$ , kaže se da  $e$  *spaja*  $u$  i  $v$ , a da su  $u$  i  $v$  *krajevi* od  $e$ , odnosno  $u$  i  $v$  su *incidentni* sa  $e$ . Dva vrha incidentna s nekim bridom zovu se *susjedni vrhovi*. Isto tako su i dva brida sa zajedničkim vrhom *susjedni bridovi*. Brid kojemu se oba kraja podudaraju zove se *petlja*. Graf je *jednostavan* ako nema petlji ni dva brida koja spajaju isti par vrhova. Graf je *konačan* ako su



Sl. 4. Primjer izomorfnosti i neizomorfnosti grafova. Grafovi  $G$  i  $K_{3,3}$  su međusobno izomorfni, a grafovi  $G$  i  $H$  su neizomorfni