Rješenje se izvodi na osnovi pretpostavke da je debljina klina jednaka jedan i da je sila $F$ jednolično raspodijeljena po debljini.

Poseban je slučaj kad koncentrirana sila djeluje okomito na rub poluravnine jedinične debljine (tzv. Flamantova zadaća sl. 11). Tada je $\beta = 0$, $\alpha_1 = -\pi/2$, $\alpha_2 = \pi/2$, tako da je $a = 0$ i $b = c = \pi/2$. Naprezanje $\sigma_r$ tada iznosi:

$$\sigma_r = -\frac{2F}{\pi r}\cos\varphi. \tag{146}$$

Ako je $\beta = \pi/2$, $\alpha_1 = -\pi/2$ i $\alpha_2 = \pi/2$, sila djeluje na rubu poluravnine, ali paralelno s njime (sl. 12). To je tzv. Cerrutijev problem. Jedino je radijalno naprezanje $\sigma_r$ različito od nule i iznosi:

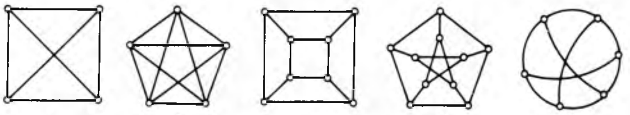
$$\sigma_r = -\frac{2F}{\pi r}\sin\varphi. \tag{147}$$

Rješenja za beskonačni klin i beskonačnu poluravninu primjenjuju se u nizu praktičnih problema kao što su zub zupčanika, konzolni trokutni nosač, dodir valjka s ravnom podlogom, željeznički kotač na tračnici itd. Premda su u takvim problemima tijela konačnih dimenzija, navedena rješenja zadovoljavaju inženjerske potrebe i s konačnim granicama.

LIT.: *H. M. Westergaard,* Theory of Elasticity and Plasticity. Harvard University Press, Cambridge, Massachusetts 1952. – *Chi-Teh Wang,* Applied Elasticity. McGraw-Hill, New York, Toronto, London 1953. – *S. P. Timoshenko,* History of Strength of Materials. McGraw-Hill, New York 1953. – *S. Timošenko, J. N. Gudier,* Teorija elastičnosti (prijevod s engleskog). Građevinska knjiga, Beograd 1962. – *Н. И. Мусхелишвили,* Некоторые основные задачи математической теории упругости. Наука, Москва 1966. – *Pei Chi Chou, N. J. Pagano,* Elasticity. D. Van Nostrand, Princeton 1967. – *R. Wm. Little,* Elasticity. Prentice-Hall, Englewood Cliffs 1973. – *В. Новацкий,* Теория упругости (prijevod s poljskog). Мир, Москва 1975. – *N. Naerlović, M. Plavšić,* Teorija elastičnosti. Naučna knjiga, Beograd 1980. – *Z. Kostrenčić,* Teorija elastičnosti. Školska knjiga, Zagreb 1982. – *D. Rašković,* Teorija elastičnosti. Naučna knjiga, Beograd 1985.

*S. Jecić*

**TEORIJA GRAFOVA,** matematička disciplina iz područja diskretne i kombinatorne matematike, kojoj je osnovna značajka geometrijski pristup u proučavanju apstraktnih modela. Grafovi su osnovni objekt proučavanja te teorije. Graf se, pojednostavnjeno rečeno, sastoji od vrhova i njihovih spojnica koje se zovu bridovi, a prikazuje se obično crtežom u ravnini (sl. 1).

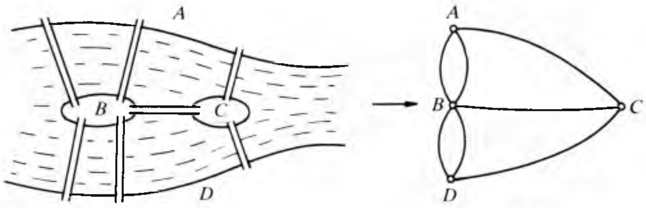


*a* *b* *c* *d* *e*

Sl. 1. Neki jednostavni grafovi. *a* potpun graf s četiri vrha ($K_4$), *b* potpun graf s pet vrhova ($K_5$), *c* kubni graf ($Q_3$), *d* Petersonov graf, *e* premoštena petlja

Suvremena teorija grafova najčešće se razvrstava u algebarsku, topološku (ili geometrijsku) i algoritamsku teoriju grafova, s primjenama. Algebarska se teorija grafova uglavnom bavi nalaženjem nekih invarijanata grafa algebarskog ili kombinatornog tipa, različitim prebrojavanjima na grafovima i sl., dok se topološka teorija grafova uglavnom bavi smještavanjima grafova u ravninu ili u koje druge plohe, zatim različitim obilascima grafova i sl. Mnogobrojne su primjene teorije grafova u matematici, npr. u algebri, teoriji vjerojatnosti i statistici, teoriji brojeva, topologiji itd., zatim u kemiji, fizici (npr. statističkoj mehanici), biologiji i medicini (osobito u genetici), tehnici (napose u elektrotehnici pri proučavanju električnih mreža), računarskim znanostima, ekonomiji, sociologiji, lingvistici i dr. Algoritamska se teorija grafova bavi nalaženjem efikasnih algoritama za rješavanje problema koji se mogu iskazati terminima teorije grafova.

Početkom se teorije grafova smatra rješenje problema mostova u Königsbergu. Taj problem glasi: Može li se šetnjom po Königsbergu svaki most prijeći samo jednom i vratiti se na početak šetnje? (sl. 2). Taj je problem riješio švicarski matematičar L. Euler (1707–1783) pokazavši da je takva šetnja nemoguća. Euler je promatrao pripadni graf (sl. 2b) u kojem vrhovi $A$, $B$, $C$ i $D$ predstavljaju otoke i obale, a spojnice među njima mostove. Pokazao je da na nekom grafu postoji šetnja koja započinje u nekom vrhu, prelazi svaki brid samo jednom i vraća se u početni vrh ako i samo ako je svaki vrh paran (tj. leži na parnom broju bridova). Budući da je svaki vrh grafa na sl. 2b neparan, takva je šetnja po Königsbergu nemoguća. Grafovi na kojima je takva šetnja moguća zovu se *Eulerovi grafovi.*

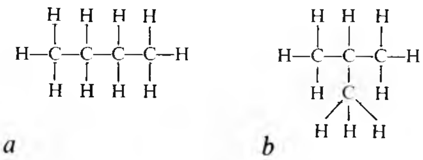



*a* *b*

Sl. 2. Sedam mostova preko rijeke Pregel u Königsbergu (današnji Kaliningrad). *a* situacija, *b* pripadni graf

Neki od daljih problema koji su dali zamah teoriji grafova još u XVIII. i XIX. st. jesu: problem *osam kraljica* na šahovskoj ploči (može li se na šahovsku ploču postaviti osam kraljica tako da jedna drugu ne napada i, ako može, na koliko je to načina moguće), problem *puta oko svijeta,* problem *četiriju boja, problem transporta* i dr.

Sredinom XIX. st. G. Kirchhoff je proučavao električne mreže i sustave jednadžbi koji opisuju struje i napone u takvim mrežama (tj. grafovima), te u njima tražio razapinjuća stabla pomoću kojih se dobivaju linearno nezavisne konture. U to je doba djelovao i A. Cayley, koji se bavio prebrojavanjima izomera zasićenih ugljikovodika ($C_nH_{2n+2}$, sl. 3), što je dovelo do problema prebrojavanja *stabala* u kojima je svaki atom vodika jednovalentan, a svaki atom ugljika četverovalentan. Opću metodu za takva prebrojavanja razvili su G. Pólya i dr. tek tridesetih godina XX. st.



*a* *b*

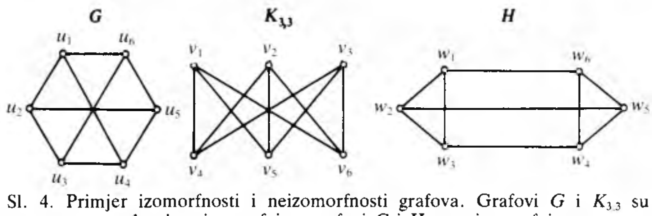
Sl. 3. Dva izomera zasićenog ugljikovodika $C_4H_{10}$. *a* *n*-butan, *b* izobutan

Prvu monografiju iz teorije grafova objavio je D. König (1936). Tu su već naznačeni neki od osnovnih pojmova u vezi s povezanošću, planarnošću, bojenjem, sparivanjem na grafovima itd. Najsnažniji zamah i procvat teorija grafova započinje u pedesetim godinama XX. st. Jedan je od bitnih razloga pojava i razvoj sve bržih i snažnijih elektroničkih računala koja su omogućila rješavanje mnogih praktičkih problema s mnoštvom proračuna. Takvi su problemi zahtijevali pronalazak efikasnih algoritama, a za to su pak bila potrebna dalja teorijska razmatranja.

## OSNOVNI POJMOVI TEORIJE GRAFOVA

**Vrhovi i bridovi.** *Graf* $G$ je uređena trojka $G = (V(G), E(G), \varphi_G)$ koja se sastoji od nepraznog skupa $V = V(G)$, kojeg su elementi *vrhovi* od $G$, skupa $E = E(G)$ disjunktnog sa $V(G)$, kojeg su elementi *bridovi* od $G$ i *funkcije incidencije* $\varphi_G$, koja svakom bridu od $G$ pridružuje neuređen par (ne nužno različitih) vrhova od $G$. Katkad se piše skraćeno $G = (V(G), E(G))$ ili $G = (V, E)$.

Ako je $e \in E(G)$, a $u, v \in V(G)$ tako da je $\varphi_G(e) = uv$, kaže se da *e spaja u* i *v*, a da su $u$ i $v$ *krajevi* od $e$, odnosno $u$ i $v$ su *incidentni* sa $e$. Dva vrha incidentna s nekim bridom zovu se *susjedni vrhovi.* Isto tako su i dva brida sa zajedničkim vrhom *susjedni bridovi.* Brid kojemu se oba kraja podudaraju zove se *petlja.* Graf je *jednostavan* ako nema petlji ni dva brida koja spajaju isti par vrhova. Graf je *konačan* ako su

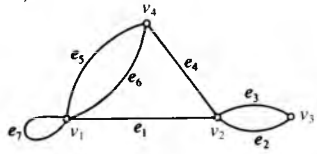



Sl. 4. Primjer izomorfnosti i neizomorfnosti grafova. Grafovi $G$ i $K_{3,3}$ su međusobno izomorfni, a grafovi $G$ i $H$ su neizomorfni

oba skupa $V(G)$ i $E(G)$ konačna. U daljem će se izlaganju pretpostavljati da se radi o konačnim grafovima.

Grafovi $G$ i $H$ su *izomorfni* ako postoje obostrano jednoznačne korespondencije (bijekcije) $f: V(G) \to V(H)$ i $g: E(G) \to E(H)$ koje čuvaju incidenciju, tj. $\varphi_G(e) = uv$ ako i samo ako je $\varphi_H(g(e)) = f(u)f(v)$. Uređeni se par $(f, g)$ zove *izomorfizam* grafova $G$ i $H$. Tako su npr. grafovi $G$ i $K_{3,3}$ na sl. 4 izomorfni, dok grafovi $G$ i $H$ nisu izomorfni.

**Matrice.** Ako graf $G$ (sl. 5) ima vrhove $v_1, v_2, \ldots, v_m$ i bridove $e_1, e_2, \ldots, e_n$, tada je *matrica incidencije* od $G$ $(n \times m)$-matrica $M(G) = [m_{ij}]$ (sl. 5b), gdje je $m_{ij}$ = broj (0, 1 ili 2) koliko su puta $v_i$ i $e_j$ incidentni. *Matrica susjedstva* od $G$ je $(n \times n)$-matrica $A(G) = [a_{ij}]$ (sl. 5c), gdje je $a_{ij}$ broj bridova koji spajaju $v_i$ i $v_j$.




*a*

$$M(G) = \begin{array}{c} \begin{matrix} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 & e_7 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \begin{matrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{matrix} \qquad A(G) = \begin{array}{c} \begin{matrix} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \begin{matrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{matrix}$$

Matrica incidencije od $G$ — Matrica susjedstva od $G$

*b* — *c*

Sl. 5. Primjer prikazivanja grafa matricama. *a* graf $G$, *b* matrica incidencije $M(G)$, *c* matrica susjedstva $A(G)$

Graf se može pohraniti u elektroničko računalo upravo preko matrice susjedstva. No, budući da matrica $A(G)$ ima obično dosta nula, to nije i najefikasniji način. Efikasnije je pohranjivanje liste stvarnih susjedstva ili još bolje liste susjedstva za svaki vrh posebno, odnosno tzv. vezanih lista.

Broj je neizomorfnih jednostavnih grafova sa $n$ vrhova (za velike $n$, tj. asimptotski) jednak

$$g_n = \frac{1}{n!} 2^{\binom{n}{2}} + \left( \frac{2n(n-1)}{2^n} + \frac{8(3n-7)n!}{3(n-3)!\,2^{2n}} + \mathrm{O}\left( \frac{n^5}{2^{5n/2}} \right) \right), \quad (1)$$

gdje $g(n) = \mathrm{O}(f(n))$ znači da postoji $M > 0$ i $n_0$ tako da je $|g(n)| \leqq Mf(n)$ za sve $n \geqq n_0$.

**Podgrafovi.** Graf $H$ je *podgraf* od $G$, u oznaci $H \subseteq G$, ako je $V(H) \subseteq V(G)$, $E(H) \subseteq E(G)$ i $\varphi_H = \varphi_{G|E(H)}$, tj. $\varphi_H$ je restrikcija od $\varphi_G$ na $E(H)$. Podgraf $H$ od $G$ za koji je $V(H) = V(G)$ zove se *razapinjući podgraf.*

**Stupanj vrha** $v$ grafa $G$ jest broj $d_G(v)$ bridova incidentnih s tim vrhom, pri čemu se svaka petlja računa dva puta. *Regularni graf* je onaj kojemu svi vrhovi imaju isti stupanj. Ako je taj stupanj jednak $k$, govori se o *k-regularnom grafu.* Tako je npr. potpuni graf $K_n$, tj. jednostavni graf sa $n$ vrhova od kojih su svaka dva spojena bridom, $(n-1)$-regularan (grafovi $K_4$ i $K_5$ na sl. 1).

Ako graf $G$ ima $m$ bridova, onda je

$$\sum_{v \in V(G)} d_G(v) = 2m. \quad (2)$$

**Šetnja po grafu** $G$ konačni je niz $W = v_0 e_1 v_1 e_2 v_2 \ldots e_k v_k$ kojem su članovi naizmjence vrhovi $v_i$ i bridovi $e_i$, tako da su krajevi od $e_i$ vrhovi $v_{i-1}$ i $v_i$ za svako $i$ $(1 \leqq i \leqq k)$. Kaže se još da su vrhovi $v_0$ i $v_k$ ***početak*** i ***kraj šetnje*** $W$ ili da je to $(v_0, v_k)$-šetnja, a broj $k$ *duljina* te *šetnje.* Vrhovi šetnje koji nisu ni početak ni kraj zovu se *unutrašnji* vrhovi. Netrivijalna šetnja $W$ je *zatvorena* ako joj je duljina pozitivna, a početak i kraj se podudaraju, tj. $v_0 = v_k$. Ako su bridovi $e_1, e_2, \ldots, e_k$ šetnje $W$ međusobno različiti, onda se $W$ zove *staza*, a ako su u stazi i vrhovi međusobno različiti, ona se zove *put.* Zatvorena staza kojoj su početak i unutrašnji vrhovi različiti zove se *ciklus.*

**Povezanost grafova.** Graf je *povezan* ako za svaka dva njegova vrha $u$ i $v$ postoji $(u,v)$-put u tom grafu. Inače je graf nepovezan. Nepovezani graf je disjunktna unija svojih *komponenata povezanosti*, tj. povezanih podgrafova. Graf je povezan ako i samo ako ima samo jednu komponentu povezanosti.

Povezan graf s barem $k+1$ vrhova je (*vršno*) *k-povezan* ako se izbacivanjem bilo kojih $k-1$ ili manje vrhova (zajedno s bridovima koji su s njima incidentni) preostali graf ne raspada na disjunktne komponente povezanosti. Tako je npr. povezani graf s barem dva vrha 1-povezan.

Analogno se definira da je graf *bridno k-povezan.* Vršna povezanost nije veća od bridne povezanosti, a bridna nije veća od najmanjeg stupnja svih vrhova grafa. Kaže se da su dva puta u grafu *unutrašnje disjunktna* ako nemaju zajedničkih unutrašnjih vrhova. *Whitneyev teorem* kaže da je graf $G$ (barem s tri vrha) 2-povezan ako i samo ako su svaka dva vrha u grafu $G$ spojena barem s dva unutrašnja disjunktna puta. Jedna je od posljedica ako je graf 2-povezan da svaka dva njegova vrha leže na zajedničkom ciklusu. Te su ideje korisne pri konstrukciji tzv. *pouzdanih telekomunikacijskih mreža.*

**Karakteristični polinom grafa.** Ako su $v_1, v_2, \ldots, v_n$ vrhovi grafa $G$, a $A$ matrica susjedstva od $G$, onda je $(i, j)$-ti član $l$-te potencije $A^l$ od $A$ jednak broju $(v_i, v_j)$-šetnji na grafu $G$ duljine $l$. U vezi s tim korisno je promatrati *karakteristični polinom grafa* (tj. pripadne matrice susjedstva)

$$\varphi(G, t) = \det(tI - A). \quad (3)$$

Odatle se različitim algebarskim metodama mogu dobiti informacije o samom grafu. Tako je npr. važna invarijanta grafa njegov *spektar*, tj. skup svih svojstvenih vrijednosti matrice susjedstva.

**Automorfizam** grafa $G$ je izomorfizam grafa $G$ na sama sebe. Skup svih automorfizama s operacijom komponiranja čini grupu koja se zove *grupa automorfizama* grafa $G$. To je također važna invarijanta grafa. Zanimljivo je da za svaku (apstraktnu) grupu postoji graf kojega je grupa automorfizama izomorfna zadanoj grupi.

**Novi grafovi.** Osnovne su konstrukcije novih grafova iz zadanih sljedeće. Neka su $G_1 = (V_1, E_1)$ i $G_2 = (V_2, E_2)$ dva grafa. Tada je njihova *unija* graf $G = G_1 \cup G_2 = (V_1 \cup V_2, E_1 \cup E_2)$. Posebno, ako je $V_1 \cap V_2 = 0$ i $E_1 \cap E_2 = 0$, tada se disjunktna unija $G_1 \cup G_2$ bilježi još kao $G_1 + G_2$. Kartezijev produkt $G = G_1 \times G_2$ ima za skup vrhova $V = V_1 \times V_2$, a dva su vrha $(u_1, u_2)$, $(v_1, v_2) \in V$ susjedna u $G$ ako i samo ako su ili $u_1 = v_1$ i $u_2$ susjedni s vrhom $v_2$ u $G_2$ ili $u_2 = v_2$ i $u_1$ susjedni s vrhom $v_1$ u $G_1$. Tako se npr. *n-dimenzionalni kubni graf* $Q_n$ može rekurzivno definirati kao produkt

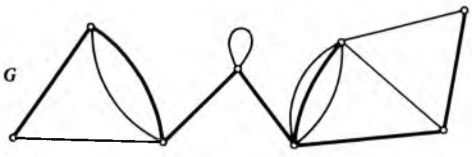
$$Q_n = Q_{n-2} \times K_2, \quad (4)$$

pri čemu je $Q_1 = K_2$ (potpuni graf s dva vrha, tj. dužina). Ako je $V' \subseteq V$ neki podskup vrhova grafa $G = (V, E)$, onda se podgraf $G - V'$ dobiva iz $G$ *izbacivanjem* svih vrhova $V'$ i svih bridova incidentnih s vrhovima iz $V'$ (tj. $V'$ se »iščupa« iz $G$). Analogno vrijedi za $E' \subseteq E$ podskup bridova, pa se podgraf $G - E'$ dobiva iz $G$ izbacivanjem svih bridova iz $E'$. Ako je $V' = \{v\}$ jednočlan skup, piše se $G - v$ (umjesto $G - \{v\}$).

**Problem rekonstrukcije.** Jedan je od do sada neriješenih problema u teoriji grafova tzv. *problem rekonstrukcije* (a potječe od S. Ulama iz 1942. god.) koji glasi: Neka su $G$ i $H$ grafovi sa $n$ $(\geqq 3)$ vrhova $u_1, \ldots, u_n$ i $v_1, \ldots, v_n$. Ako su za svako $j = 1, 2, \ldots, n$ podgrafovi $G - u_j$ i $H - v_j$ međusobno izomorfni, pita se da li su tada $G$ i $H$ izomorfni. Sluti se da je odgovor potvrdan i ta se slutnja pokazala ispravnom za mnoge klase grafova, ali je to općenito još uvijek, za sada (1988), otvoren problem.

**Stabla.** Povezani graf bez ciklusa zove se *stablo* (ili *drvo*). Disjunktna unija stabala zove se *šuma.* U svakom je stablu broj bridova za jedan manji od broja vrhova. Svaki povezani graf ima razapinjući podgraf koji je stablo. To se stablo zove *razapinjuće stablo* (sl. 6).

Matrični teorem o stablima daje broj $\tau(G)$ različitih razapinjućih stabala grafa $G$, a glasi ovako: Neka je graf $G$ povezani graf bez petlji, a $V(G) = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$. Neka je $Q = [q_{ij}]$ matrica $(n \times n)$, gdje je $q_{ii} = d_G(v_i)$, $q_{ij}$ broj bridova




Sl. 6. Primjer razapinjućeg stabla (deblji bridovi) kao podgrafa povezanog grafa

u $G$ između $v_i$ i $v_j$, za $i \neq j$, a $Q_0$ matrica $(n-1)\times(n-1)$ koja se dobiva iz $Q$ izbacivanjem bilo kojeg retka i stupca. Tada je $\tau(G) = \det Q_0$. Kao poseban slučaj dobiva se jednostavna *Cayleyeva formula* za broj razapinjućih stabala potpunog grafa

$$\tau(K_n) = n^{n-2}. \tag{5}$$

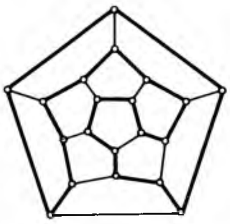
Broj neizomorfnih stabala sa $n$ vrhova (za velike $n$, tj. asimptotski) iznosi

$$t_n = C\frac{a^n}{n^{2,5}} + O\left(\frac{a^n}{n^{3,5}}\right), \tag{6}$$

gdje je $C \approx 0{,}534948$ i $a \approx 2{,}95576$.

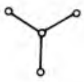
**Obilasci po grafovima.** *Eulerova šetnja* po grafu je zatvorena šetnja koja svakim bridom grafa prolazi samo jednom. Graf je *Eulerov* ako dopušta Eulerovu šetnju. *Eulerova staza* prolazi svakim bridom grafa točno jednom.

Povezani je graf $G$ (barem s jednim bridom) Eulerov ako i samo ako su stupnjevi svih vrhova parni brojevi. Odatle slijedi negativno rješenje problema mostova u Königsbergu. Povezani graf posjeduje Eulerovu stazu ako i samo ako ima najviše dva vrha neparnog stupnja.



Sl. 7. Hamiltonov ciklus (deblji bridovi) na grafu dodekaedra

Graf je *Hamiltonov* ako na njemu postoji *Hamiltonov ciklus*, tj. ciklus koji sadrži sve vrhove grafa. Tako je npr. graf dodekaedra (sl. 7) Hamiltonov, tj. put je oko svijeta moguć. Dodekaedar je pravilan poliedar koji ima 20 vrhova, 30 bridova i 12 pravilnih peterokuta od kojih se u svakom vrhu sastaju po tri peterokuta, dok npr. graf na sl. 8 nije Hamiltonov, a nije to ni Petersonov graf (sl. 1d).



Sl. 8. Graf u obliku velikog slova *Y*. Taj graf nije Hamiltonov

Za razliku od Eulerovih grafova, danas nije poznat neki zadovoljavajući kriterij za *hamiltonijanost* grafova, no ima mnogo dovoljnih uvjeta. Na primjer *Diracov teorem* koji glasi: Ako stupanj svakog vrha (kojih je barem tri) nije manji od polovice broja svih vrhova, takav je graf Hamiltonov. Sličan je i *Oreov teorem*: Ako suma stupnjeva svaka dva nesusjedna vrha nije manja od broja svih vrhova, takav je graf Hamiltonov. Isto tako ima i nekih korisnih nužnih uvjeta. Takav je npr. sljedeći: Neka je $G$ graf sa $n$ vrhova. Ako se za neko $k$, $1 \leqq k \leqq n-1$, izbacivanjem $k$ vrhova dobiva da preostali graf ima više od $k$ komponenata povezanosti, onda graf $G$ sigurno nije Hamiltonov.

**Bojenje grafova.** Pravilno je *bojenje* vrhova grafa $G$ sa $k$ boja (ili $k$-bojenje) pridruživanje koje svakom vrhu pridružuje jednu od $k$ boja (tj. to je funkcija $V(G) \to \{1,2,\ldots,k\}$) tako da susjedni vrhovi budu različito obojeni. Graf je *k-obojiv* ako dopušta $k$-bojenje. *Kromatski broj* $\gamma(G)$ grafa $G$ najmanji je broj $k$ boja takav da je graf $G$ $k$-obojiv. Tako je npr. $\gamma(K_n) = n$, a $\gamma(P) = 3$, gdje je $P$ Petersonov graf (sl. 1d). Za uniju dvaju grafova vrijedi

$$\gamma(G_1 \cup G_2) \leqq \gamma(G_1)\gamma(G_2). \tag{7}$$

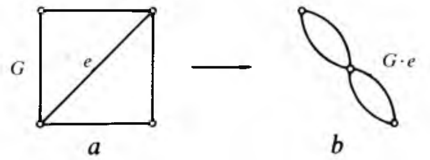
Najvažniji je tu *Brooksov teorem* koji glasi: Kromatski je broj jednostavnoga povezanog grafa najviše jednak maksimalnom stupnju $\Delta$ svih vrhova, osim kad je graf potpun ili ciklus neparne duljine. U tim je slučajevima kromatski broj jednak $\Delta + 1$.

Analogno se za graf bez petlji definira *bridno k-bojenje* kao pridruživanje koje svakom bridu pridružuje jednu od $k$ boja tako da susjedni bridovi budu različito obojeni. *Bridno-kromatski broj* $\gamma'(G)$ najmanji je broj $k$ takav da je graf $G$ $k$-bridno obojiv. Za bridnokromatski broj vrijedi *Vizingov teorem* koji glasi: Za svaki jednostavni graf $G$ vrijedi $\gamma'(G) = \Delta$ ili $\gamma'(G) = \Delta + 1$.

Broj vršnih $k$-bojenja grafa $G$ označuje se s $P(G,k)$ i zove *kromatski polinom* od $G$. Za računanje kromatskog polinoma vrijedi rekurzija

$$P(G,k) = P(G-e,k) - P(G\cdot e,k), \tag{8}$$

gdje je $G-e$ graf $G$ iz kojeg je izbačen brid $e$, a $G\cdot e$ je graf dobiven iz $G$ tako da je $e$ izbačen, a da su krajevi od $e$ identificirani, tj. brid $e$ je *kontraktiran* (sl. 9).



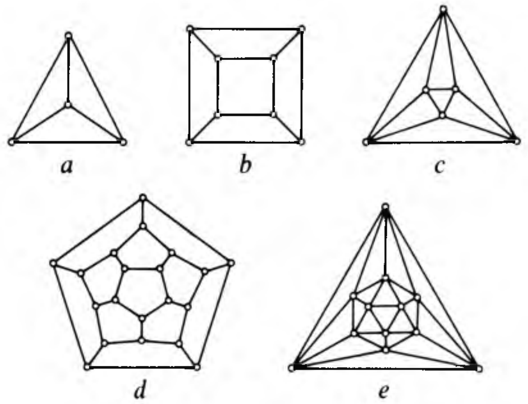

Sl. 9. Kontrakcija brida $e$ u grafu $G$. *a* graf $G$ s bridom $e$, *b* graf $G\cdot e$ dobiven kontrakcijom brida $e$ u $G$

**Planarni grafovi i smještanje grafova u plohe.** Graf $G$ je *planaran* ako se može smjestiti (ili nacrtati) u ravnini tako da mu se bridovi sijeku samo u vrhovima. Takva realizacija grafa zove se *ravninsko smještenje*, a sam graf *ravninski*. Ravninski graf $G$ dijeli ravninu na područja koja se zovu *strane* grafa $G$. Svaki takav graf ima samo jednu neomeđenu stranu koja se zove *vanjska*. Ako su sve strane ravninskog smještenja trokuti, graf se zove *triangulacija*.

Neka je graf $G$ povezan ravninski graf sa $v$ vrhova, $b$ bridova i $s$ strana. Tada vrijedi *Eulerova formula*

$$v - b + s = 2. \tag{9}$$

Jedna je od posljedica te formule da postoji samo pet pravilnih poliedara (tzv. *Platonova tijela*, sl. 10).

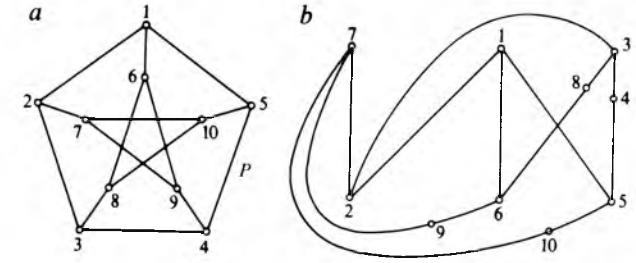



Sl. 10. Grafovi pravilnih poliedara. *a* tetraedar, *b* kocka, *c* oktaedar, *d* dodekaedar, *e* ikozaedar

Osnovni je kriterij planarnosti *Kuratowski-Pontrjaginov teorem* koji glasi: Graf $G$ je planaran ako i samo ako ne sadrži subdiviziju od $K_5$ (sl. 1b) ili $K_{3,3}$ (sl. 4). *Subdivizija grafa G* je graf koji se dobiva iz grafa $G$ konačnim nizom subdivizija bridova, a *subdivizija brida* je umetanje vrha na taj brid. Tako npr. Petersonov graf $P$ nije planaran (sl. 11).

Svaki je planarni graf 4-obojiv. To je i odgovor na *problem četiriju boja* koji je bio postavljen oko 1850, a riješen je tek 1976/77. Za rješavanje tog problema upotrebljavala su se najsnažnija tadašnja računala. Još je i danas to za neke matematičare problematičan dokaz u smislu njegove provjerljivosti.

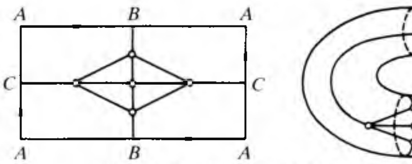
O kromatskim polinomima planarnih grafova ne zna se mnogo. Jedan je od izazovnih rezultata tvrdnja W. T. Tuttea da kromatski polinom triangulacije s puno vrhova ima realnu




Sl. 11. Prikaz neplanarnosti Petersenova grafa. *a* Petersenov graf, *b* subdivizija od grafa $K_{3,3}$ (sl. 4)

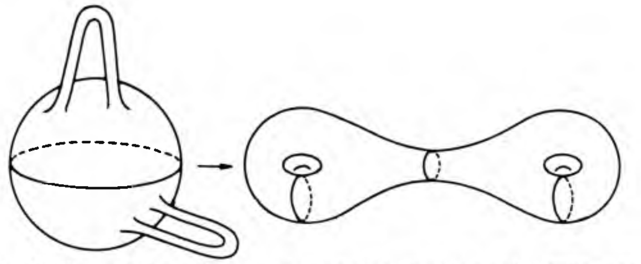
nultočku koja je bliska broju $1+\alpha$, gdje je $\alpha=(1+\sqrt{5})/2\approx$ $\approx 1{,}618034$ *omjer zlatnog reza*, poznat još renesansnim arhitektima.

Kao što su planarni grafovi oni koji se mogu smjestiti u ravninu (ili što je isto na sferu), slično se definiraju i grafovi koji se mogu smjestiti na neku plohu. Npr. graf $K_5$ (sl. 1b) iako neplanaran, može se smjestiti u torus (sl. 12).




Sl. 12. Smještenje grafa $K_5$ u torus

Svaka se orijentabilna zatvorena ploha može dobiti iz sfere naljepljivanjem nekoliko ručki. Broj se tih ručki zove *rod* (ili *genus*) plohe. Tako je sfera roda 0, torus roda 1, dvostruki torus roda 2 (sl. 13) itd.



Sl. 13. Nastanak dvostrukog torusa. *a* na rupe izbušene na sferi nalijepe se ručke, *b* dvostruki torus

Općenito se za neku plohu $P$ definira *kromatski broj* $\gamma(P)$ kao maksimum kromatskih brojeva grafova koji se mogu smjestiti u plohu $P$. Za povezanu orijentabilnu zatvorenu plohu $P_g$ roda $g>0$ vrijedi *Heawoodova formula*:

$$\gamma(P_g)=\left\lfloor\frac{7+\sqrt{1+48g}}{2}\right\rfloor. \tag{10}$$

Pri tom je $\lfloor x\rfloor$ najveći cijeli broj jednak $x$ ili manji od $x$. Za $g=0$, ta se formula svodi na teorem o četiri boje.

Nadalje, za svaki se graf $G$ definira njegov *rod* $g$, u oznaci $g(G)$, kao najmanji rod (orijentabilne zatvorene) plohe u koju se $G$ može smjestiti. Tako je npr.

$$g(K_n)=\left\lceil\frac{(n-3)(n-4)}{12}\right\rceil. \tag{11}$$

Pri tom je $\lceil x\rceil$ najmanji cijeli broj jednak $x$ ili veći od $x$.

*Debljina grafa* $G$ definira se kao najmanji broj $T(G)$ planarnih podgrafova od $G$ kojih je unija čitav graf $G$. Ako je $G$ jednostavan graf s $n$ vrhova i $m$ bridova, vrijedi

$$T(G)\geqq\left\lceil\frac{m}{3n-6}\right\rceil. \tag{12}$$

Tako npr. za potpuni graf $K_n$ vrijedi jednakost

$$T(K_n)=\left\lfloor\frac{n+7}{6}\right\rfloor,\ n\neq 9,10, \tag{13}$$

dok je za $n=9$ i $n=10$, $T(K_9)=T(K_{10})=3$, a za $n$-dimenzionalni kubni graf $Q_n$ vrijedi $T(Q_n)=\lfloor n/4\rfloor+1$. Za *potpuni bipartitni graf* $K_{r,s}$ (tj. jednostavni graf sa $V=X\cup Y$, $X\cap$ $\cap\, Y=\Phi$, $|X|=r$, $|Y|=s$, a svaki vrh iz $X$ spojen je sa svakim vrhom iz $Y$) vrijedi da je

$$T(K_{r,s})=\left\lceil\frac{rs}{2(r+s)-4}\right\rceil, \tag{14}$$

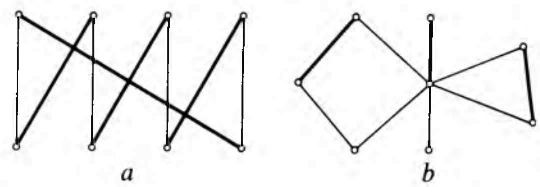
uz neke rijetke izuzetke od kojih najmanji graf ima 48 vrhova.

*Presječni broj grafa* $G$, u oznaci $p(G)$, najmanji je broj presijecanja po dva od njegovih bridova među svim ravninskim realizacijama tog grafa. Rod grafa nije veći od njegova presječnog broja.

Za $\min(r,s)\leqq 6$ dobiva se

$$p(K_{r,s})=\lfloor r/2\rfloor\lfloor(r-1)/2\rfloor\lfloor s/2\rfloor\lfloor(s-1)/2\rfloor. \tag{15}$$

**Sparivanje.** Podskup $M\subseteq E(G)$ je *sparivanje* u grafu $G$ ako mu elementi nisu petlje, a nikoja dva brida iz $M$ nisu susjedna. Kaže se da su dva kraja brida u $M$ *sparena* u $M$. Sparivanje $M$ *zasićuje* vrh $v$ (vrh $v$ je $M$-*zasićen*) ako je neki brid iz $M$ incidentan s vrhom $v$. Ako je svaki vrh grafa $G$ $M$-zasićen, kaže se da je $M$ *savršeno sparivanje* (sl. 14a). *Maksimalno sparivanje* je ono koje sadrži najviše elemenata (sl. 14b). Ako se bridovi iz sparivanja $M$ nazovu tamnima, a oni koji nisu u $M$ svijetlima, tada je osnovni kriterij za maksimalnost sparivanja *Bergeov teorem* koji glasi: Sparivanje je $M$ u grafu $G$ maksimalno ako i samo ako u grafu $G$ ne postoji put kojem bridovi alterniraju kao svijetli, tamni, svijetli, tamni,..., a krajevi su mu $M$-nezasićeni.



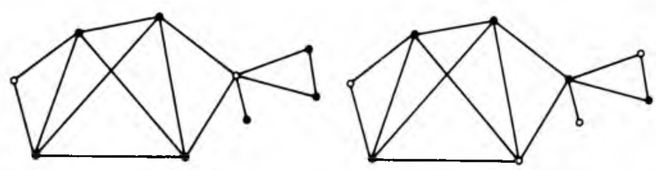

Sl. 14. Sparivanje u grafu (deblji bridovi). *a* savršeno sparivanje, *b* maksimalno sparivanje

Važna su sparivanja u tzv. bipartitnim grafovima. Graf $G$ je *bipartitan* ako se skup vrhova može particionirati na dva disjunktna neprazna podskupa $X$ i $Y$ (tj. $V(G)=X\cup Y$, $X\cap Y=0$) tako da svaki brid iz grafa $G$ ima jedan kraj u $X$, a drugi u $Y$. Graf $K_{3,3}$ (sl. 4) je bipartitan. Ako je $M$ maksimalno sparivanje u takvu bipartitnom grafu, onda je broj bridova u $M$ jednak

$$|M|=|X|-\max\{|S|-|N(S)|;\ S\subseteq X\}, \tag{16}$$

gdje je $|S|$ broj elemenata skupa $S$, a $N(S)$ je skup svih vrhova koji su susjedni barem jednom vrhu iz $S$. Nadalje, ako je graf $G$ regularni bipartitni graf (i $E(G)\neq 0$), onda graf $G$ ima savršeno sparivanje (npr. na sl. 14a).

*Pokrivač grafa* $G$ je podskup $K\subseteq V(G)$ vrhova grafa tako da svaki brid iz $G$ ima barem jedan kraj u $K$ (sl. 15a). Pokrivač $K$ je *minimalan* ako ima najmanje elemenata (sl. 15b).




Sl. 15. Pokrivač grafa (*a*) i minimalni pokrivač grafa (*b*)

U bipartitnom je grafu broj bridova u maksimalnom sparivanju jednak broju vrhova u minimalnom pokrivaču (to je *König-Egerváryjev teorem*).

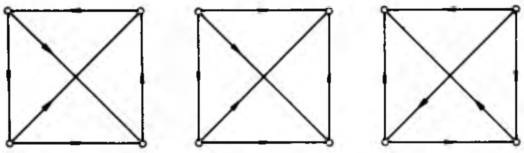
**Usmjereni grafovi.** To su grafovi kojima je svaki brid orijentiran. Stoga se govori o *luku* umjesto *orijentiranom* ili *usmjerenom bridu*. Luk $a$ je određen uređenim parom svojih krajeva $a=(u,v)$, gdje se $u$ zove *početni*, a $v$ *krajnji vrh*. Usmjereni se graf zove i *digraf*. Za digraf $D$ definiraju se *ulazni stupanj* (*in-stupanj*) $d_D^-(v)$ i *izlazni stupanj* (*out-stupanj*)

$d_D^+(v)$ kao broj lukova s krajem, odnosno početkom u vrhu $v$. Slično kao kod grafova definiraju se *usmjerene šetnje, putovi, ciklusi* itd. na digrafovima.

Mnogi pojmovi i tvrdnje koje vrijede za grafove prenose se gotovo automatski na digrafove. Tako je npr. matrica susjedstva $A(D) = [a_{ij}]$ digrafa $D$ s vrhovima $v_1, v_2, \ldots, v_n$ matrica $(n \times n)$ u kojoj je $(i,j)$-ti član $a_{ij}$ jednak broju lukova u $D$, s početkom u $v_i$ i krajem u $v_j$. Ako je $m$ broj lukova digrafa $D$, vrijedi

$$\sum_{v \in V} d_D^-(v) = \sum_{v \in V} d_D^+(v) = m. \tag{17}$$

Jedan je od tipičnih rezultata te teorije da digraf $D$ sadrži usmjereni put duljine $\gamma - 1$, gdje je $\gamma = \gamma(G)$ kromatski broj pripadnog grafa $G$ u kojem se naprosto zaborave orijentacije lukova.



Sl. 16. Primjeri potpunih digrafova (turnira) sa četiri vrha

Potpuni se digraf zove *turnir* (sl. 16). Turnir uvijek ima vrh iz kojeg se svaki drugi vrh može doseći usmjerenim putom duljine najviše dva luka.

## PRIMJENE TEORIJE GRAFOVA

**Elektrotehnika.** Jedna je od najstarijih primjena teorije grafova u elektrotehnici, a odnosi se na formiranje i rješavanje jednadžbi konturnih struja električne mreže, koje se uglavnom osnivaju na prvom i drugom Kirchhoffovom zakonu (v. *Električne mreže*, TE 4, str. 20). U takvim je mrežama najvažnije pronaći razapinjuća stabla radi dobivanja linearno nezavisnih sustava kontura.

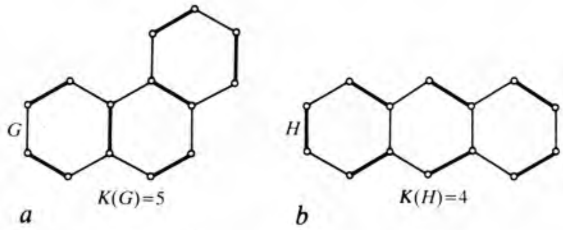
U teoriji sustava upravljanja pojavljuju se matematički modeli koji se svode na sustave linearnih diferencijalnih jednadžbi s konstantnim koeficijentima. Primjenom Laplaceove transformacije dobiva se sustav linearnih algebarskih jednadžbi koje treba riješiti. U tim se jednadžbama, umjesto funkcija koje ovise o vremenu, a predstavljaju napone, struje ili druge fizikalne veličine, pojavljuju Laplaceovi transformati tih funkcija. Matrica je takva sustava, u pravilu, slabo popunjena (tj. ima puno nula), pa se u tim problemima primjenjuju postupci s grafovima za njihovo rješavanje.

**Kemija i fizika.** Već su spomenuti (sl. 3) *molekularni grafovi* kojima se prikazuju kemijske strukture molekula. Različite grafovske invarijante molekularnih grafova imaju tada određeno značenje za kemijsku strukturu promatranih molekula. Tako se npr. pokazuje da se niz fizikalno-kemijskih svojstava zasićenih ugljikovodika (npr. toplina izgaranja, vrelište i dr.) može dovesti u vezu s tzv. *Hosoyinim topološkim indeksom* pripadnog grafa. Označi li se s $M(G,k)$ skup svih sparivanja veličine $k$ u grafu $G$ i definira li se $|M(G,0)| = 1$, tada se Hosoyin topološki indeks definira izrazom

$$Z(G) = \sum_{k=0}^{m} |M(G,k)|, \tag{18}$$

gdje je $m$ broj bridova grafa $G$. Radi predviđanja različitih fizikalno-kemijskih svojstava polimera interesantno je promatrati njegov *Wienerov indeks*, tj. sumu udaljenosti svih vrhova pripadnog grafa. Periodičnost regularnih polimera omogućuje rekurzivno računanje Wienerova indeksa. Isto se tako grafički mogu prikazati i kemijske reakcije. *Spektralna teorija grafova* u uskoj je vezi s problemima statističke fizike i kristalografije. Tako se npr. problem dimera odnosi na istraživanje termodinamičkih svojstava sustava dvoatomnih molekula (tzv. dimera) koji se apsorbiraju na površini kristala. Najpogodnija mjesta za apsorpciju atoma na površini kristala čine dvodimenzionalnu rešetku. Jedan dimer može zauzeti dvije susjedne točke rešetke. Problem se dimera sastoji u određivanju broja načina na koje se dimeri mogu smjestiti u rešetku tako da se ne preklapaju i da sve točke rešetke budu pokrivene dimerima. Kad je rešetka kvadratna, problem je dimera ekvivalentan problemu određivanja broja načina kako da se šahovska ploča tipa $n \times n$ ($n$ je paran broj) pokrije sa $n^2/2$ pločica domina tako da svaka pločica pokriva dva susjedna polja i da sva polja šahovske ploče budu pokrivena. Za običnu šahovsku ploču sa $8 \times 8$ polja dobiva se kao rješenje problema dimera broj 12988816. Općenito, za pravokutnu rešetku tipa $m \times n$ dobiva se asimptotska formula $(m, n \to \infty)$ za problem dimera $\exp(mnC/\pi)$, gdje je $C \approx 0{,}91597$. Problem dimera samo je poseban slučaj određivanja broja savršenih sparivanja ili *Kekuléovih struktura* $K(G)$ na pripadnom grafu $G$. Već samom usporedbom brojeva $K(G)$ može se zaključiti o stabilnosti molekule. Molekula s grafom $G$ (sl. 17a) stabilnija je od one s grafom $H$ (sl. 17b), jer je $K(G) > K(H)$.

Za poliheksagonalne grafove (tj. za benzenoide kao na sl. 17) poznate su metode za određivanje broja $K(G)$.




Sl. 17. Primjeri Kekuléovih struktura (deblji bridovi). *a* $K(G) = 5$, *b* $K(H) = 4$

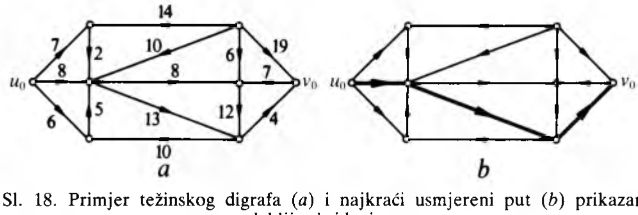
Druge primjene enumerativnog karaktera u kemiji i fizici, npr. za točno određivanje broja stereoizomera i izomerizacija (radi npr. njihova sortiranja i katalogiziranja i sl.), osnivaju se na *Pólya-Redfieldovoj teoriji*, a imaju reperkusija u spektroskopiji i kvantnoj kemiji. Takvi se problemi često svode na traženje broja grafova s unaprijed zadanim stupnjevima vrhova ili drugim zadanim strukturama.

Druge vrste primjena odnose se na *Brownovo gibanje* i svode se na računanje broja šetnji na nekom putu.

**Optimizacija i računarske znanosti.** U primjenama teorije grafova na probleme kombinatorne optimizacije najčešće se promatraju tzv. težinski grafovi.

*Težinski graf* je graf $G$ (ili digraf) zajedno s *funkcijom težine* $w$ koja svakom bridu $e \in E(G)$ (ili luku digrafa) pridružuje njegovu *težinu*, tj. realan broj $w(e)$. Ako je $H \subseteq G$ podgraf težinskog grafa $G$, onda se *težina* od $H$ definira kao suma težina svih bridova iz $H$. Mnogi problemi u optimizaciji se svode na to da se u težinskom grafu nađe podgraf nekog određenog tipa s minimalnom ili maksimalnom težinom.

Jedan je takav i *problem najkraćeg puta*: U zadanoj željezničkoj ili cestovnoj mreži kojom su povezani neki gradovi treba odrediti najkraći put između dva zadana grada iz mreže. U tom se problemu pojavljuju težine bridova kao udaljenosti zajedno sa smjerom kretanja među pojedinim gradovima. Dakle treba pronaći put najmanje težine (odn. duljine) između dva zadana vrha $u_0$ i $v_0$ (sl. 18). Opći se postupak za nalaženje najkraćeg (usmjerenog) puta od nekog vrha do svih drugih vrhova digrafa može opisati *Dijkstrinim algoritmom*, a za problem najkraćih putova iz svakog vrha u svaki drugi vrh postoji *Roy-Warshall-Floydov algoritam*. To su efikasni algoritmi. Kaže se da je neki algoritam *efikasan* ako je njegova složenost, tj. broj osnovnih operacija (npr. zbrajanje, množenje, uspoređivanje dvaju brojeva) odozgo omeđen polinomom broja ulaznih podataka, koji su u




Sl. 18. Primjer težinskog digrafa (*a*) i najkraći usmjereni put (*b*) prikazan debljim bridovima

grafovima najčešće određeni brojem vrhova $n$ i brojem bridova ili lukova $m$. Tako se za Dijkstrin algoritam dobiva složenost reda veličine $n^2$. To se zapisuje kao $O(n^2)$ i kaže se da je za njegovu provedbu potrebno vrijeme $O(n^2)$. Algoritmi koji imaju eksponencijalnu složenost $O(2^n)$, $O(3^n)$ itd. nisu efikasni, dok je faktorijelna složenost, npr. $O(n!)$, još manje efikasna, a pogotovo $O(n^n)$. Utvrđivanje efikasnosti algoritama veoma je važno prilikom njihova implementiranja u računala, pogotovo kad se radi s velikim grafovima, npr. od $10^5$ vrhova. U posljednje je doba s tim u vezi i izrasla čitava disciplina koja se bavi tim problemima i zove se *teorija složenosti*, a kad se radi o konkretnim proračunima, procjenama itd., to se zove *analiza algoritama*. Malom modifikacijom Dijkstrina algoritma može se on poboljšati do složenosti $O((m+n)\log_2 n)$, što za velike grafove s relativno malo bridova predstavlja veliko poboljšanje.

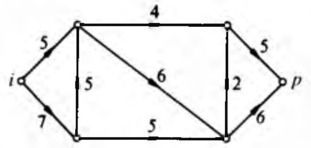
Ima mnogo problema za koje se ne zna da li postoji efikasan algoritam za njihovo rješenje. Takav je npr. sljedeći problem. Zadan je prirodni broj $L$, pa se pita da li u grafu $G$ postoji put među dva specificirana vrha koji ima duljinu veću od $L$. Taj i mnogi drugi problemi pripadaju u klasu tzv. *nedeterministički polinomski potpunih problema* ili kratko potpunih *NP-problema*.

Za potpune NP-probleme karakteristično je da svi poznati algoritmi za njihovo rješavanje zahtijevaju (barem) eksponencijalno mnogo provedbi polinomskih potproblema. Npr. u spomenutom problemu lako je u polinomskom vremenu provjeriti da li je duljina nekog zadanog puta veća od $L$, ali ima eksponencijalno mnogo takvih putova (jer skup od $n$ elemenata ima $2^n$ podskupova). Prema definiciji svaki se potpuni NP-problem može u polinomskom vremenu transformirati u svaki drugi takav problem. Stoga bi otkriće polinomskog algoritma za takav problem odmah značilo egzistenciju takvog algoritma za bilo koji drugi NP-problem. Nakon mnogo bezuspješnih potraga, danas (1988) opće je uvjerenje da polinomski algoritmi za takve probleme ne postoje, ali se dokaz za to ne zna. Priličan je broj problema iz teorije grafova koji su potpuni NP-problemi. Takav je npr. problem trgovačkog putnika, zatim problem $k$-bojenja, problem egzistencije Hamiltonova ciklusa, problem određivanja genusa grafa i dr. *Problem trgovačkog putnika* sastoji se u tome da se u potpunom težinskom grafu nađe Hamiltonov ciklus najmanje težine.

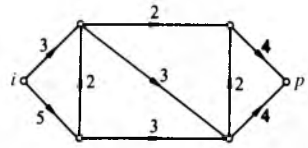
Mnogi pak fundamentalni problemi iz teorije grafova imaju zadovoljavajuće efikasno algoritamsko rješenje. Takav je npr. *problem spajanja*, a sastoji se u određivanju razapinjućeg stabla minimalne težine u zadanom težinskom grafu, ili *problem planarnosti*, kojim se određuje planarnost grafa. Taj je problem čak linearan, tj. postoji algoritam koji ga rješava u vremenu $O(n)$. Zatim je tu problem nalaženja maksimalnog sparivanja u zadanom grafu itd.

Mnogi problemi u ekonomiji i tehnici mogu se modelirati kao protok u transportnoj mreži. Problem je naći maksimalni protok, tj. optimizirani protok u mreži uz zadane transportne kapacitete. Usmjerenim se težinskim grafom može, naime, modelirati protok robe od proizvođača (*izvora*) do nekih odredišta (*ponora*). To može biti npr. protok nafte u naftovodu, prijenos telefonskih poziva u komunikacijskom sustavu, transport proizvoda do trgovačkih središta itd. Težina luka u takvu se digrafu može smatrati gornjom granicom protoka nafte koja se može transportirati dijelom naftovoda.

Kao primjer neka posluži transportna mreža (sl. 19) za koju treba naći maksimalni protok. *Protok* je u takvoj mreži funkcija koja svakom luku pridružuje realan broj ($\geqq 0$) koji nije veći od transportnog kapaciteta (unaprijed zadanih brojeva) svakog luka i koji ima svojstvo da je u svakom vrhu (osim izvora i ponora) količina koja ulazi u taj vrh (tj. suma protoka na lukovima kojima je kraj u tom vrhu) jednaka količini koja izlazi iz tog vrha. *Vrijednost protoka* je suma vrijednosti na lukovima koji imaju početak u izvoru. *Maksimalni protok* je onaj kojem je vrijednost najveća. Na tim pretpostavkama može se konstruirati efikasan algoritam složenosti $O(nm^2)$, gdje je $n$ broj vrhova, a $m$ broj lukova mreže, kojim se određuje maksimalan protok. Za mrežu na sl. 19 maksimalni je protok prikazan na sl. 20.




Sl. 19. Primjer transportne mreže s izvorom ($i$), ponorom ($p$) i transportnim mogućnostima (kapacitetima) lukova




Sl. 20. Maksimalni protok za transportnu mrežu na sl. 19

Treba uz ta razmatranja spomenuti *teorem K. Mengera* koji glasi: Neka je $G$ povezani graf, a $A$ i $B$ dva disjunktna podskupa vrhova od $G$; tada je najmanji broj izbačenih vrhova kojima se separiraju $A$ i $B$ jednak najvećem broju disjunktnih putova između $A$ i $B$. Pritom se kaže da su $A$ i $B$ separirani ako ne postoji put u $G$ s krajevima u $A$ i $B$. Od raznih reinterpretacija tog teorema posebno je korisna ona primijenjena u linearnom programiranju.

Mnoge druge primjene grafova (napose stabala) u računarskim znanostima, npr. za različita pretraživanja, strukture podataka, sortiranja, u teoriji kodiranja i dr., također su vrlo plodonosne. Isto tako, mnogi teorijski rezultati, kao Eulerovi grafovi, Hamiltonovi ciklusi, bojenja, planarnost itd., imaju primjene i u sklopovima i programima računala. Tako se npr. Eulerovi grafovi primjenjuju u konstrukciji mreža *transpjutora*, dok je npr. pri konstrukciji čipova važno znati presječni broj grafa, kako bi se minimizirao broj spajanja izvan pločica. Za slične je potrebe važno znati i debljinu grafa. U arhitekturi *paralelnih računala* također se primjenjuju razne metode teorije grafova.

Dalje su primjene teorije grafova u računarskim znanostima grafički prikazi algoritma ili računalnog programa pomoću *dijagrama toka*. U takvu su usmjerenom grafu naredbe vrhovi, a usmjereni bridovi (tj. lukovi) pokazuju redoslijed izvršenja naredbi. Različitim metodama teorije grafova tada se mogu proučavati dijagrami toka, da bi se dobile nove informacije o algoritmima i programima, što omogućuje njihovo poboljšanje i proširenje na nove probleme.

Metode teorije grafova primjenjuju se također pri konstrukciji i formiranju *logičkih* (ili *prekidačkih*) *sklopova*. Tu su od fundamentalne važnosti ideje C. E. Shannona koji je primjenom Booleove algebre definirao algebru koja je osnova za konstrukciju logičkih sklopova. S pridruženim grafovima (npr. Karnaughovom kartom) projektiraju se tada sklopovi s minimalnim brojem prekidača.

Grafovi se još primjenjuju u teoriji *konačnih automata* (ili *sekvencijalnih sklopova*), gdje je vrlo važan *graf prijelaznih stanja automata*. Spomenuti sklopovi čine dva osnovna tipa kontrolnih sklopova koji se ugrađuju u digitalna računala, zatim u prodajne automate, telekomunikacijske uređaje, semaforske sustave za regulaciju prometa i sl.

LIT.: *S. Seshu, M. B. Read,* Linear Graphs and Electrical Networks. Adison-Wesley, Reading, Mass. 1961. – *L. R. Ford, D. R. Fulkerson,* Flows in Networks. Princeton Univ. Press, Princeton 1962. – *R. Busacker, T. Saaty,* Finite Graphs and Networks. An Introduction with Applications. McGraw-Hill, New York 1965. – *N. Deo,* Graph Theory with Applications to Engineering and Computer Science. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N. J. 1974. – *F. S. Roberts,* Discrete Mathematical Models. Prentice Hall, Englewood Cliffs, N. J. 1976. – *L. Beineke, R. J. Wilson,* Applications of Graph Theory. Academic Press, New York 1979. – *S. Even,* Graph Algorithms. Computer Science Press, Woodland Hills, Calif. 1979. – *M. N. Swamy, K. Thulasiraman,* Graphs, Networks and Algorithms. John Wiley & Sons, New York 1981. – *D. Cvetković, M. Doob, H. Sachs,* Spectra of Graphs. Theory and Applications. Academic Press, New York 1982. – *A. Aho, J. Hopcroft, J. Ullman,* Data Structures and Algorithms. Addison-Wesley, Reading, Mass. 1983. – *N. Trinajstić,* Chemical Graph Theory. CRC Press, Boca Raton, Fla. 1983. – *C. Gibbons,* Algorithmic Graph Theory. Cambridge Univ. Press., Cambridge 1985. – *D. Cvetković,* Teorija grafova i njene primene. Naučna knjiga, Beograd 1985. – *R. J. Wilson,* Introduction to Graph Theory. Longman, Harlow, Essex 1985. – *D. Veljan,* Kombinatorika s teorijom grafova. Školska knjiga, Zagreb 1989.

*D. Veljan*