Taj je kapacitet prijenosnog kanala prihvaćen kao osnova za normiranje suvremenih integriranih mreža za prijenos govora, teksta, podataka i slika. Te su mreže, sa skromnim udjelom pokretnih mehaničkih dijelova, nazvane ISDN (Integrated Service Digital Network). Za ilustraciju može se navesti da konvencionalni telegrafski kanal, gdje je $s = 2$, ima kapacitet prijenosnog kanala $C = 2 \cdot 4000\ \mathrm{Hz} \cdot \mathrm{lb}\,2 = 8000\ \mathrm{bit/s}$.

LIT.: *C. E. Shannon* and *W. Weaver*, The Mathematical Theory of Communication. The University of Illinois Press, Urbana 1949. – *G. K. Zipf*, Human Behavior and The Principle of Least Effort. Addison Wesley, Reading, Mass. 1949. – *L. Brillouin*, La science et la théorie de l'information. Masson, Paris 1959. – *W. Meyer-Eppler*, Grundlagen und Anwendungen der Informationstheorie. Springer-Verlag, Berlin 1959. – *J. R. Pierce*, Symbols, Signs and Noise. Harper, New York 1961. – *N. Chomsky*, Deep Structure, Surface Structure and Semantic Interpretation. M.I.T. Press, Cambridge, Mass. 1968. – *L. P. Hyvärinen*, Information Theory for Systems Engineers. Springer-Verlag, Berlin 1970. – *D. Slepian*, Key Papers in The Development of Information Theory. IEEE Press, New York 1973. – *R. W. Hamming*, Coding and Information Theory. Prentice-Hall Inc., New Jersey 1980. – *V. Matković* i *V. Sinković*, Teorija informacije. Školska knjiga, Zagreb 1984.

V. Matković

TEORIJA PLASTIČNOSTI, grana mehanike kontinuuma unutar koje se matematički formuliraju odnosi između naprezanja i deformacije tijela u plastičnom stanju te istražuju uvjeti tečenja. U teoriji plastičnosti obrađuju se metode za određivanje pomaka, deformacija i naprezanja tijela u elastoplastičnom ili plastičnom stanju. Teorija viskoelastičnosti razmatra odnose naprezanja i deformacija u viskoelastičnim tijelima, tj. tijelima koja imaju svojstva elastičnih tijela i viskoznih kapljevina (v. *Mehanika kontinuuma*, TE 8, str. 186). Viskoplastična su tijela elastična, plastična i viskozna. Takva se tijela ponekad nazivaju i viskoelastoplastičnima.

Razvoj teorije plastičnosti počeo je u drugoj polovici XIX. st. Prve su važnije radove objavili H. Tresca (1864), B. de Saint-Venant i M. Lévy (1871) u Francuskoj. Tresca je proveo eksperimente o ekstruziji i probijanju duktilnih materijala te je na temelju tih eksperimenata formulirao kriterij tečenja materijala koji je poznat kao kriterij najvećega posmičnog naprezanja. Saint-Venant je za ravninsko tečenje idealno plastičnog materijala postavio sustav od pet jednadžbi između komponenata naprezanja i deformacije. Pritom je postulirao podudaranje pravaca glavnih naprezanja i glavnih deformacija. Razmatrao je savijanje i uvijanje cilindričnog štapa te raspodjelu naprezanja u debeloj cijevi potpuno plastificiranoj djelovanjem unutrašnjeg tlaka. Lévy je proširio Saint-Venantove jednadžbe na prostorne probleme povezavši priraste deformacija s devijatorskim komponentama naprezanja. Te se jednadžbe nazivaju Lévy-Misesovim jednadžbama jer ih je R. von Mises (1913) nezavisno formulirao.

Kriteriji tečenja razmatrani su i prije 1864, i to uglavnom za materijal tla. Tako je Ch. A. de Coulomb (1773) predložio kriterij koji nosi njegovo ime. Taj su kriterij primijenili J. V. Poncelet (1840) i W. J. M. Rankine (1853). J. J. Guest je koncem stoljeća ispitivao tečenje cijevi podvrgnute složenom opterećenju osnom silom i unutrašnjim tlakom. Rezultati su objavljeni 1900. i dobro se slažu s Trescinim kriterijem najvećega posmičnog naprezanja. M. T. Huber (1904) eksperimentirao je u valjaonici čelika i na temelju toga predložio kriterij opisan jednadžbom $(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 = \mathrm{const.}$, gdje su σ_1, σ_2 i σ_3 glavna naprezanja.

Von Mises je (1913), u namjeri da matematički pojednostavni Trescin kriterij, nezavisno od Hubera došao do iste jednadžbe. H. Hencky (1924) dao je Huberovu, odnosno von Misesovu kriteriju fizikalno značenje, tj. pokazao je da tečenje nastaje kad maksimalna energija promjene oblika dostigne kritičnu vrijednost. Prema toj trojici istraživača danas se taj kriterij često naziva *kriterij tečenja HMH*.

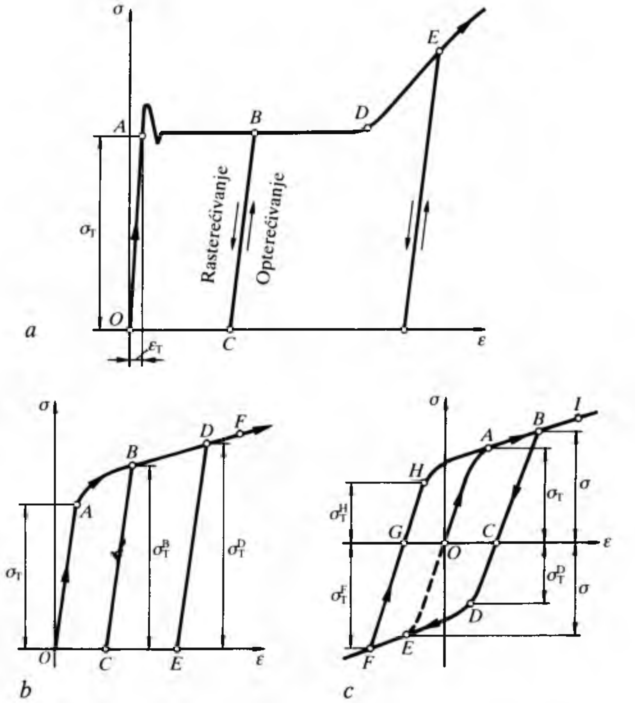
L. Prandtl je (1920) pokazao da se dvodimenzijski problem plastificiranog tijela može opisati hiperbolnim diferencijalnim jednadžbama, te je na temelju toga riješio problem utiskivanja. A. Nadai je te rezultate eksperimentalno potvrdio. Prandtlovo rješenje specijalnog problema poopćio je H. Hencky uvodeći pojam linijā klizanja. Th. von Kármán je (1910) objavio radove o izvijanju štapa u plastičnom području. W. Lode je (1926) ispitivao željezne, bakrene i niklene cijevi istodobno podvrgnute unutrašnjem tlaku i rastezanju. Rezultati pokusa u prvoj aproksimaciji potvrđuju Lévy-Misesove jednadžbe. A. Reuss je (1930) poopćio Prandtlove jednadžbe pretpostavivši da je prirast plastičnih deformacija u svakom trenutku razmjeran trenutnoj vrijednosti devijatorskih komponenata tenzora naprezanja. Te se jednadžbe nazivaju Prandtl-Reussovim jednadžbama i poopćenje su Lévy-Misesovih jednadžbi.

U toku drugoga svjetskog rata, za potrebe ratne industrije, naglo su se razvile sve grane teorije plastičnosti. Taj se razvoj nastavio i nakon rata. U naše se doba razvijaju numeričke metode analize nelinearnih problema mehanike, pa tako i teorije plastičnosti, viskoelastičnosti i viskoplastičnosti.

Razvoju teorije plastičnosti pridonijeli su još A. Haar, R. Hill, A. A. Iljušin, A. Ju. Išlinski, L. M. Kačanov, F. K. G. Odquist, H. Quinney, G. I. Taylor i mnogi drugi.

EKSPERIMENTALNI PODACI O PLASTIČNOM DEFORMIRANJU

Dijagrami deformiranja. Dijagrami ovisnosti naprezanja σ o deformaciji ε za različite materijale pri rastezanju, odnosno sabijanju, prikazani su na sl. 1. Slični dijagrami prikazuju ovisnost posmičnog naprezanja τ o kutnoj deformaciji γ. Prema načinu opterećenja takvi se dijagrami nazivaju dijagramima rastezanja, sabijanja, odnosno smicanja, ili općenito dijagramima deformiranja (v. *Otpornost građevnih materijala*, TE 10, str. 93).



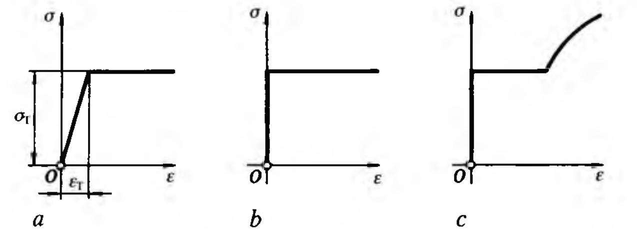
Sl. 1. Dijagrami deformiranja: *a* za meki čelik, *b* za obojene metale, *c* za materijal s Bauschingerovim efektom

Ovisnost naprezanja o deformaciji $\sigma = \sigma(\varepsilon)$, odnosno posmičnog naprezanja o kutnoj deformaciji $\tau = \tau(\gamma)$, vrlo je složena i ovisi o vrsti materijala. Točan matematički opis te ovisnosti uveo bi u teoriju plastičnosti znatne, a često i nepremostive teškoće. Zbog toga se takvi dijagrami idealiziraju (shematiziraju) tako da budu što jednostavniji, a da se pritom što manje razlikuju od stvarnih dijagrama. Kako će se dijagram idealizirati ovisi, između ostalog, i o njegovoj namjeni.

Kad se teorija plastičnosti primjenjuje za projektiranje konstrukcija, dovoljno je uzeti u obzir samo početni dio dijagrama, jer su maksimalne plastične deformacije koje nastaju u eksploataciji konstrukcije istog reda veličine kao maksimalna elastična deformacija ε_T (sl. 1a). Nasuprot tome, pri obradbi metala deformiranjem deformacije su velike, pa treba uzeti u obzir čitavo područje dijagrama deformiranja. Tada su, međutim, elastične deformacije malene u usporedbi s plastičnima, pa se mogu zanemariti.

Dijagram na sl. 1a vrijedi za meki čelik. Kad naprezanje dostigne granicu tečenja σ_T, deformacija ε raste neko vrijeme bez porasta naprezanja (dio dijagrama *ABD*). Ta je deformacija mnogo veća od deformacije ε_T. Na kraju u točki *D* materijal očvršćuje deformiranjem, pa je dalja deformacija moguća samo uz porast naprezanja. Dijagrami se za takve materijale, kad se upotrebljavaju za dimenzioniranje konstrukcija, idealiziraju prema sl. 2a. Tako idealiziran materijal naziva se elastično-idealno plastični materijal. Kad se radi o obradbi deformiranjem, materijal se idealizira kao kruto-idealno plastični prema sl. 2b ili 2c.

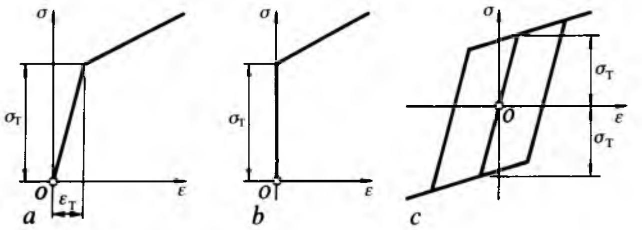
Dijagram na sl. 1b vrijedi za aluminij, bakar, magnezij ili njihove slitine i druge slične materijale. Takvi materijali nemaju izraženu granicu tečenja, pa se uvodi pojam *konven-*



Sl. 2. Idealizirani dijagrami rastezanja mekog čelika: *a* elastično-idealno plastični materijal, *b* kruto-idealno plastični materijal, *c* očvrstivi materijal

cionalne granice tečenja $\sigma_{0,2}$. Ta se granica tečenja definira kao naprezanje koje uzrokuje trajnu (plastičnu) deformaciju od 0,2%. Rasterećenje se uvijek zbiva po pravcu (*BC*, odnosno *DE* na sl. 1b). Ako se materijal u stanju *B* rastereti do *C* i zatim ponovno optereti, on se ponaša linearno sve dok naprezanje ne dostigne vrijednost koju je imalo neposredno prije rasterećenja (naprezanje σ_T^B) To je nova granica tečenja koja je porasla zbog očvršćenja materijala deformiranjem.

Efekt smanjenja granice tečenja pri promjeni predznaka naprezanja (rastezanje i sabijanje) naziva se Bauschingerovim efektom (sl. 1c), prema J. Bauschingeru. Ako se takav materijal rasteže od polaznog stanja, dijagram ima tok *OAB*. Nakon rasterećenja naprezanje se linearno smanjuje do točke *C*. Ako se tada materijal tlači, dijagram se mijenja po liniji *CDEF*, pa je $\sigma_T^D < \sigma_T$. Kad bi se materijal u stanju *C* ponovno rastezao, deformirao bi se prema dijelu dijagrama *CBI*. Prema tome, deformiranjem se povećava granica tečenja ako je ponovno opterećenje istog predznaka. Granica se tečenja, međutim, smanjuje ako se nakon deformiranja pri ponovnom opterećenju naprezanju mijenja predznak. Ako se naprezanju u točki *F* promijeni predznak, deformiranje se odvija po pravcu *FGH*, a zatim po krivulji *HABI*. Kad bi se materijal u izvornom stanju opteretio tlačno, deformiranje bi se odvijalo po krivulji *OEF*.

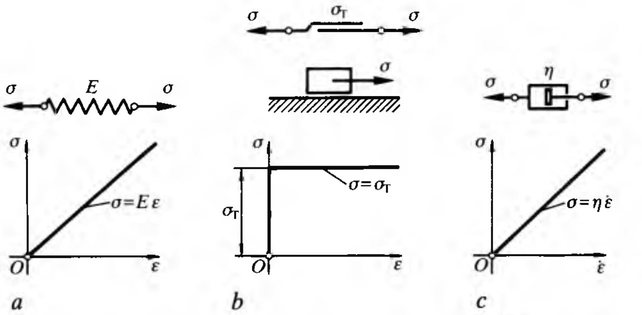


Sl. 3. Idealizirani dijagrami deformiranja: *a* elastično-linearno očvrstivi materijal, *b* kruto-linearno očvrstivi materijal, *c* materijal s Bauschingerovim efektom

Na sl. 3 prikazani su idealizirani dijagrami deformiranja za dijagrame na sl. 1b i 1c.

Eksperimentima je utvrđeno da se pri plastičnoj deformaciji ne mijenja obujam, tj. da je Poissonov koeficijent $\nu = 0{,}5$.

Reološki modeli. Ponašanje materijala prema idealiziranim dijagramima rastezanja može se opisati i pomoću tzv. reoloških modela. Osnovni reološki elementi prikazani su na sl. 4. Oprugom se modelira linearna elastičnost (sl. 4a), suhim trenjem kruto-idealno plastično ponašanje materijala (sl. 4b), a uljnim prigušivačem linearna viskoznost (sl. 4c). Kombini-



Sl. 4. Osnovni reološki elementi: *a* linearno elastična opruga, *b* plastični klizač sa suhim trenjem, *c* linearno viskozni prigušivač

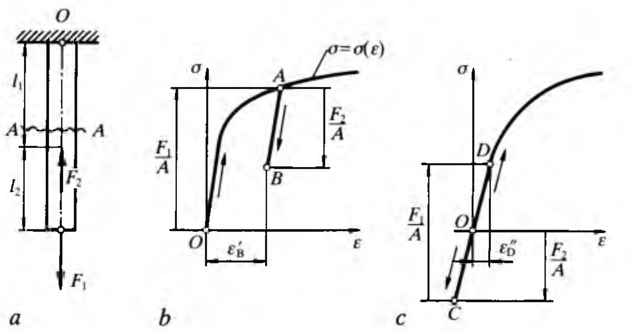
Tablica 1
REOLOŠKI MODELI

Materijal	*Reološki model*	*Ovisnost* $\sigma = \sigma(\varepsilon)$
Kruto-idealno plastičan		$\sigma = \sigma_T$ $\varepsilon = 0$ za $\sigma < \sigma_T$
Elastično-idealno plastičan		$\sigma = E\varepsilon$ za $\varepsilon < \varepsilon_T$ $\sigma = \sigma_T$ za $\varepsilon \geqq \varepsilon_T$
Kruto-linearno očvrstiv		$\sigma = \sigma_T + \varepsilon E_T$
Elastično-linearno očvrstiv		$\sigma = \varepsilon E$ za $\sigma < \sigma_T$ $\sigma = \sigma_T + (\varepsilon - \varepsilon_T)E_T$ za $\sigma > \sigma_T$
Viskoplastičan		$\sigma = f_1(\varepsilon, t)$
Viskoelasto-plastičan		$\sigma = f_2(\varepsilon, t)$

ranjem osnovnih reoloških elemenata mogu se dobiti reološki modeli kojima se modeliraju različiti tipovi viskoelastičnih i viskoplastičnih materijala (tabl. 1).

ANALIZA NAPREZANJA U ŠTAPOVIMA

Za jednostavnu analizu naprezanja štapova u elastoplastičnom i plastičnom stanju pretpostavlja se da je materijal elastično-idealno plastičan i da ima jednaku granicu tečenja σ_T pri vlačnom i tlačnom naprezanju. Granica je tečenja pri smicanju τ_T. Također se pretpostavlja da je opterećenje jednostavno, tj. da sve sile i druga opterećenja počinju djelovati istodobno i da zatim rastu razmjerno zajedničkom faktoru. Pri analizi u plastičnom području ne vrijedi zakon superpozicije (sl. 5), jer naprezanje ovisi o redoslijedu opterećivanja. Ako najprije djeluje sila F_1, štap će se plastično deformirati. Ako nakon nje djeluje sila F_2, naprezanje će u presjeku *A–A* iznositi $\Delta F/A$, gdje je $\Delta F = F_1 - F_2$, a *A* poprečni presjek štapa, pa je $\Delta F/A < \sigma_T$. Naprezanje se u tom presjeku mijenja po krivulji *OAB*. Međutim, ako najprije djeluje sila F_2, u presjeku *A–A* nastaje tlačno naprezanje $F_2/A < \sigma_T$. Ako zatim djeluje sila F_1 u istom presjeku, nastaje naprezanje $\Delta F/A$, koje je jednako kao i u prethodnom primjeru. Naprezanje se mijenja po krivulji *OCD* bez pojave plastične deformacije.



Sl. 5. Nemogućnost primjene metode superpozicije u teoriji plastičnosti, *a* štap opterećen s dvije sile, *b* tok naprezanja u presjeku *A–A* kad najprije djeluje sila F_1 pa zatim F_2, *c* tok naprezanja u presjeku *A–A* kad najprije djeluje sila F_2 pa zatim F_1

Osno opterećenje. Naprezanje u osno opterećenom štapu iznosi

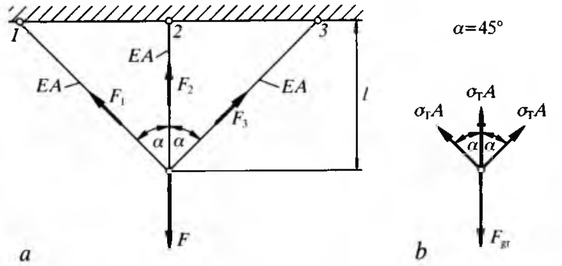
$$\sigma_x = \frac{N}{A} \leqq \sigma_T, \tag{1}$$

gdje je *N* normalna sila, a *A* površina poprečnog presjeka. Kad naprezanje dostigne granicu tečenja, počinje neograničeno tečenje, pa je

$$N_{\max} = \sigma_T A \tag{2}$$

najveća sila koju štap može preuzeti.

Ako je štapna konstrukcija statički određena, s pojavom tečenja u jednom od štapova konstrukcija prestaje biti kruti lik te se pretvara u mehanizam, tj. nastaje plastični slom konstrukcije. Nasuprot tome, statički neodređena konstrukcija ne prelazi u mehanizam kad se pojavi tečenje u jednom od štapova. Osim toga, plastična je deformacija u tom štapu malena, reda veličine ε_T, jer susjedni štapovi koji su još u elastičnom stanju preuzimaju povećano opterećenje i sprečavaju neograničeno tečenje štapa.



Sl. 6. Određivanje graničnog opterećenja statički neodređene konstrukcije. *a* konstrukcija s tri štapa, *b* dijagram sila pri graničnom opterećenju, *A* presjek štapa, *E* Youngov modul elastičnosti

To se može rastumačiti konstrukcijom sastavljenom od tri štapa (sl. 6). Analizom u elastičnom području mogu se odrediti sile u štapovima koje iznose

$$F_1 = F_3 = \frac{\cos^2\alpha}{1+2\cos^3\alpha}F = 0{,}2929\,F, \tag{3a}$$

$$F_2 = \frac{1}{1+2\cos^3\alpha}F = 0{,}5858\,F, \tag{3b}$$

pa je naprezanje u štapovima $\sigma_{x1} = \sigma_{x3} = 0{,}2929\,F/A$ i $\sigma_{x2} = 0{,}5858\,F/A$. Kad je sila $F = F_T = 1{,}707\,\sigma_T A$, naprezanje je u srednjem štapu jednako granici tečenja σ_T. S povećanjem opterećenja rastu deformacije u sva tri štapa. Naprezanje u srednjem štapu ostaje konstantno (σ_T), a u ostala dva štapa raste. S daljim povećanjem opterećenja naprezanje će u štapovima *1* i *3* dostići granicu tečenja. Još dalje povećanje opterećenja više nije moguće, pa se to opterećenje naziva *graničnim opterećenjem* F_{gr}. Granično se opterećenje može odrediti neposredno iz graničnog stanja konstrukcije ne uzimajući u obzir njezino ponašanje u elastičnom području. Tako je prema sl. 5b:

$$F_{gr} = \sigma_T A + 2\sigma_T A\cos\alpha = 2{,}414\,\sigma_T A. \tag{4}$$

Metoda graničnog opterećenja. U nauci o čvrstoći (v. *Nauka o čvrstoći,* TE 9, str. 277) dijelovi se strojeva i konstrukcija dimenzioniraju tako da se odredi maksimalno naprezanje $\sigma_{\max}$, odnosno maksimalno ekvivalentno naprezanje $\sigma_{\mathrm{ekv\,max}}$ kad se radi o višeosnom naprezanju. Zatim se traži ispunjenje uvjeta čvrstoće koji glasi:

$$\sigma_{\max} \leqq \sigma_{\mathrm{dop}} \text{ ili } \sigma_{\mathrm{ekv\,max}} \leqq \sigma_{\mathrm{dop}}, \tag{5}$$

gdje je σ_{dop} dopušteno naprezanje. Na temelju tog uvjeta određuje se dopušteno opterećenje F_{dop}.

Nasuprot tome, kad se dimenzionira metodom graničnog opterećenja, određuje se F_{gr} neposredno, a zatim se primjenom faktora sigurnosti *S* određuje dopušteno opterećenje F_{dop}

$$F_{\mathrm{dop}} = \frac{F_{gr}}{S}. \tag{6}$$

Uobičajena vrijednost faktora sigurnosti za noseće čelične konstrukcije iznosi 1,5. Ako se taj faktor sigurnosti primijeni na izraz (4), dobiva se dopušteno opterećenje $F_{\mathrm{dop}} = F_{gr}/S = 1{,}609\ \sigma_T A$, koje je manje od najvećeg opterećenja u elastičnom području $F_t = 1{,}707\,\sigma_T A$. To znači da se u normalnoj eksploataciji u takvim konstrukcijama neće pojaviti plastične deformacije, iako je dopušteno opterećenje dobiveno na temelju analize u plastičnom području. Ako se plastične deformacije ipak pojave, one će se neznatno razlikovati od ε_T.

Dopušteno opterećenje na temelju elastične analize i uz jednak faktor sigurnosti 1,5 iznosi $F_{\mathrm{dop}} = 1{,}707\,\sigma_T A/1{,}5 = 1{,}138\,\sigma_T A$.

Nosivost je konstrukcije mnogo veća ako se dimenzionira metodom graničnog opterećenja. U ovom primjeru povećanje nosivosti iznosi 41%. Dimenzioniranje metodom graničnog opterećenja ne samo da osigurava uštedu materijala nego se često i lakše provodi. Međutim, metoda graničnog opterećenja ne može se uvijek primijeniti. Ne smije se primijeniti ako se konstrukcija ciklički opterećuje (npr. motori s unutrašnjim izgaranjem i sl.), ako se zahtijeva da konstrukcija izrađuje proizvode velike preciznosti (npr. alatni strojevi), ili pak kad materijal nije dovoljno duktilan.

Savijanje prizmatičnih štapova

Analiza savijanja prizmatičnih štapova u elastoplastičnom stanju provodi se uz iste pretpostavke o deformiranju i raspodjeli naprezanja kao i u elastičnom području (v. *Nauka o čvrstoći,* TE 9, str. 301). Na temelju istovjetne geometrijske analize dobit će se

$$\varepsilon_x = \frac{z}{\varrho} \tag{7}$$

gdje je z koordinata, a ϱ polumjer zakrivljenosti elastične linije.

Neovisno o tome da li se savijanje provodi u elastičnom ili plastičnom stanju, deformacija je uvijek raspodijeljena po presjeku linearno, što ne vrijedi za raspodjelu naprezanja. Dok je štap u elastičnom stanju, raspodjela je naprezanja određena izrazom

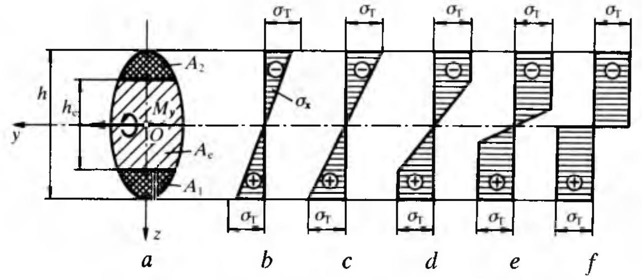
$$\sigma_x = \frac{M_y}{I_y}z, \qquad \sigma_{x\max} = \frac{M_y}{W_y}, \tag{8}$$

gdje je M_y moment savijanja, I_y moment tromosti, a W_y moment otpora.

S povećavanjem momenta savijanja raste i maksimalno naprezanje koje postaje jednako σ_T. S daljim povećanjem momenta savijanja dio presjeka prelazi u plastično stanje, a štap u elastoplastično stanje. Najveći moment u elastičnom stanju, tj. moment pri kojemu štap prelazi iz elastičnog u elastoplastično stanje, označava se kao M_{yT} i iznosi:

$$M_{yT} = W_y\sigma_T. \tag{9}$$

Štapovi s dvostruko simetričnim presjekom. Poprečni presjek ima dvije međusobno okomite osi simetrije. Savija se oko jedne od njih koja je ujedno i glavna os tromosti presjeka.



Sl. 7. Razvoj plastičnih naprezanja i deformacija. *a* dvostruko simetričan djelomično plastificirani presjek, *b* raspodjela naprezanja za $M_y < M_{yT}$, *c* za $M_y = M_{yT}$, *d* i *e* za $M_{yT} < M_y < M_{ygr}$, *f* za $M_y = M_{ygr}$

Kad moment savijanja postane veći od M_{yT}, dodaje se indeks p da se označi pojava plastičnih deformacija u krajnjim vlaknima (sl. 7). S porastom momenta savijanja M_{yp} plastični se pojasovi na oba kraja presjeka šire, a elastična se jezgra smanjuje. Raspodjela naprezanja u elastoplastičnom stanju, kad je moment savijanja M_{yp} pozitivan, određena je izrazima:

$$\sigma_x = \sigma_T \frac{2z}{h_e}, \quad -\frac{1}{2}h_e \leqq z \leqq \frac{1}{2}h_e \text{ u području } A_e, \tag{10a}$$

$$\sigma_x = \sigma_T, \quad \frac{1}{2}h_e \leqq z \leqq \frac{1}{2}h \text{ u području } A_1, \tag{10b}$$

$$\sigma_x = -\sigma_T, \quad -\frac{1}{2}h \leqq z \leqq -\frac{1}{2}h_e \text{ u području } A_2, \tag{10c}$$

gdje je h visina poprečnog presjeka, a h_e visina elastične jezgre. Kako je

$$M_{yp} = \int_A \sigma_x z \, \mathrm{d}A, \tag{11a}$$

bit će nakon uvršenja jednadžbi (10)

$$M_{yp} = \frac{2\sigma_T}{h_e}\int_{A_e} z^2 \mathrm{d}A + \sigma_T \int_{A_1} z \, \mathrm{d}A - \sigma_T \int_{A_2} z \, \mathrm{d}A, \tag{11b}$$

gdje je A_e površina elastične jezgre, a A_1 i A_2 površine plastičnih pojasova. Prvi je integral jednak momentu tromosti elastične jezgre I_{ye}, a drugi i treći su jednaki statičkim momentima površina A_1 i A_2 oko osi y, tj. S_{y1} i S_{y2}. Kako površine A_1 i A_2 imaju jednak oblik i površinu, a nalaze se sa suprotnih strana osi y, bit će $S_{y2} = -S_{y1}$. Također je $I_y/h_e = W_{ye}$, pa izraz (11b) prelazi u oblik

$$M_{yp} = \sigma_T(W_{ye} + 2S_{y1}). \tag{12}$$

Kad M_{yp} raste, plastični se pojasovi povećavaju, a elastična jezgra smanjuje. Kad h_e teži nuli, M_{yp} teži svojoj graničnoj vrijednosti M_{ygr}, pa je

$$M_{ygr} = 2\sigma_T S_y = \sigma_T W_{yp}, \tag{13}$$

gdje je S_y statički moment polovice presjeka oko osi y, a W_{yp} plastični moment otpora presjeka, jer je

$$W_{yp} = 2S_y. \tag{14}$$

Povećanje nosivosti u plastičnom stanju prema nosivosti u elastičnom stanju iznosi

$$k_f = \frac{M_{ygr}}{M_{yT}} = \frac{W_y}{W_{yp}}. \tag{15}$$

Za pravokutan presjek (sl. 8) vrijedi

$$S_y = b\frac{1}{2}(h - h_e)\frac{1}{4}(h + h_e) = \frac{bh^2}{8}\left[1 - \left(\frac{h_e}{h}\right)^2\right]. \tag{16}$$

Budući da je $W_{ye} = bh_e^2/6$, bit će prema (12):

$$M_{yp} = \sigma_T \frac{bh^2}{4}\left[1 - \frac{1}{3}\left(\frac{h_e}{h}\right)^2\right]. \tag{17}$$

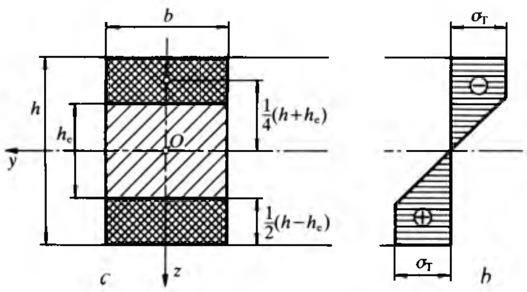
Kako je statički moment S_y jedne polovice presjeka $bh^2/8$, bit će

$$W_{yp} = 2S_y = \frac{bh^2}{4}, \tag{18}$$

pa je

$$M_{ygr} = \sigma_T \frac{bh^2}{4}. \tag{19}$$

Kad se (19) uvrsti u (17), dobiva se



Sl. 8. Određivanje plastičnog momenta otpora W_{yp} za pravokutni presjek. *a* presjek štapa, *b* dijagram naprezanja

$$M_{yp} = M_{ygr}\left[1 - \frac{1}{3}\left(\frac{h_e}{h}\right)^2\right] = \frac{3}{2}M_{yT}\left[1 - \frac{1}{3}\left(\frac{h_e}{h}\right)^2\right]. \tag{20}$$

Faktor povećanja nosivosti pravokutnog presjeka pri savijanju k_f iznosi 1,5, tj. nosivost je toga presjeka u plastičnom stanju 50% veća od nosivosti u elastičnom stanju. U tabl. 2 navedeni su momenti otpora i plastični momenti otpora, te faktori povećanja nosivosti u plastičnom stanju pri savijanju za različite oblike poprečnog presjeka štapa.

Širenje plastičnog područja. Razmatra se širenje plastičnog područja u gredi pravokutnog presjeka na dva oslonca koja je jednoliko kontinuirano opterećena. Greda s pripadnim dijagramom prikazana je na sl. 9. Kako se maksimalni moment $M_{y\max} = ql^2/8$ pojavljuje u sredini raspona, prve se plastične deformacije na sredini raspona pojavljuju u točkama A i B. Moment je savijanja u sredini grede $M_{yT} = \sigma_T W_y = q_T l^2/8$, pa je

$$q_T = \frac{8\sigma_T W_y}{l^2} = \frac{4bh^2\sigma_T}{3l^2}. \tag{21}$$

Kako se povećava opterećenje, tako se širi plastično područje i u trenutku kad čitav presjek bude u plastičnom stanju, moment će savijanja u sredini raspona iznositi

$$M_y = M_{ygr} = q_{gr}\frac{l^2}{8}. \tag{22}$$

Kako je $M_{ygr} = \sigma_T W_{yp}$, to je

$$q_{gr} = \frac{8\sigma_T W_{yp}}{l^2} = \frac{2bh^2\sigma_T}{l^2}. \tag{23}$$

Ovisnost momenta savijanja o koordinati x određena je izrazom

$$M_{yp} = \frac{ql^2}{8}\left[1 - 4\left(\frac{x}{l}\right)^2\right]. \tag{24}$$

Ako se (24) podijeli sa (22), dobiva se

$$\frac{M_{yp}}{M_{ygr}} = \frac{q}{q_{gr}}\left[1 - 4\left(\frac{x}{l}\right)^2\right], \tag{25}$$

pa je nakon izjednačenja sa (20):

$$\frac{q}{q_{gr}}\left[1 - 4\left(\frac{x}{l}\right)^2\right] = 1 - \frac{1}{3}\left(\frac{2z_e}{h}\right), \tag{26}$$

gdje je $2z_e = h_e$.

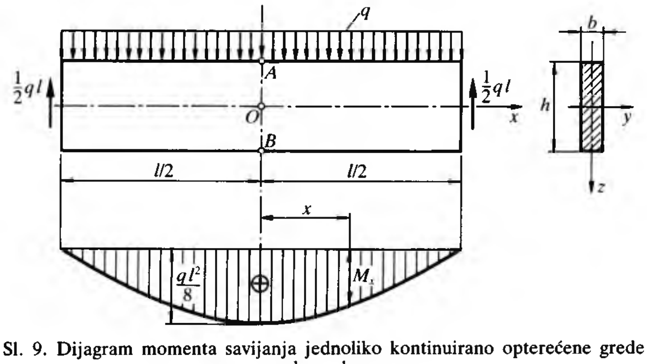
Taj se izraz može preurediti u oblik:

$$\frac{q}{q_{gr}}\left(\frac{x}{l}\right)^2 - \frac{1}{3}\left(\frac{z_e}{h}\right)^2 = \frac{1}{4}\left(\frac{q}{q_{gr}} - 1\right). \tag{27}$$

To je familija hiperbola u koordinatnom sustavu x, z_e koje ovise o parametru q/q_{gr} a imaju smisla za $2/3 \leqq q/q_{gr} \leqq 1$. Kad je $q/q_{gr} = 1$, hiperbola prelazi u dva pravca:

$$z_e = \pm\sqrt{3}\frac{h}{l}x, \tag{28}$$

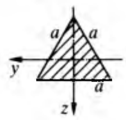
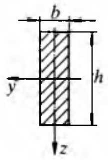
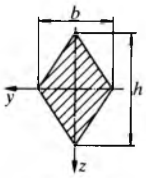
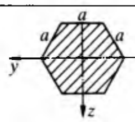
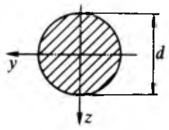
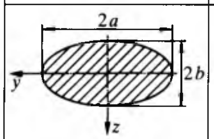
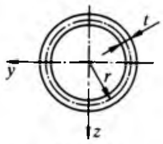
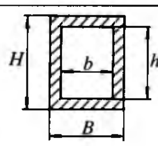
koji su asimptote te parabole. Asimptote sijeku gornji i donji rub grede na udaljenosti $l_1 = l/(2\sqrt{3}) = 0{,}2887\,l$ (sl. 10).



Sl. 9. Dijagram momenta savijanja jednoliko kontinuirano opterećene grede na dva oslonca

Tablica 2

AKSIJALNI PLASTIČNI MOMENTI OTPORA I FAKTORI POVEĆANJA NOSIVOSTI U PLASTIČNOM STANJU

Presjek	W_{yp}	W_y	k_{ty}	W_{zp}	W_z	k_{tz}
	$\frac{a^3}{8}(2-\sqrt{2}) = 0{,}073223a^3$	$\frac{a^3}{32} = 0{,}03125a^3$	$4(2-\sqrt{2}) = 2{,}34315$	$\frac{a^3\sqrt{3}}{24} = 0{,}0721688a^3$	$\frac{a^3\sqrt{3}}{48} = 0{,}036084a^3$	2,0
	$\frac{bh^2}{4}$	$\frac{bh^2}{6}$	1,5	$\frac{hb^2}{4}$	$\frac{hb^2}{6}$	1,5
	$\frac{bh^2}{12}$	$\frac{bh^2}{24}$	2	$\frac{hb^2}{12}$	$\frac{hb^2}{24}$	2
	a^3	$\frac{5}{8}a^3 = 0{,}625a^3$	1,6	$\frac{7\sqrt{3}}{12}a^3 = 1{,}01036a^3$	$\frac{5\sqrt{3}}{16}a^3 = 0{,}5413a^3$	1,867
	$\frac{d^3}{6}$	$\frac{\pi d^3}{32}$	1,7	$\frac{d^3}{6}$	$\frac{\pi d^3}{32}$	1,7
	$\frac{4}{3}ab^2$	$\frac{\pi}{4}ab^2$	1,7	$\frac{4}{3}a^2b$	$\frac{\pi}{4}a^2b$	1,7
	$2r^2t$	$\pi r^2 t$	1,571	$2r^2t$	$\pi r^2 t$	1,571
	$\frac{BH^2-bh^2}{4}$	$\frac{BH^2-bh^2}{6}$	1,5	$\frac{HB^2-hb^2}{4}$	$\frac{HB^2-hb^2}{6}$	1,5

Na sl. 11 prikazano je plastično područje u trenutku potpune plastifikacije presjeka za nekoliko nosača opterećenih koncentričnim silama ili kontinuiranim opterećenjem. Potpuno plastificirani presjek, kad je materijal idealno plastičan, opire se savijanju momentom $M_{y\mathrm{gr}}$, tj. ponaša se kao zglob, pa se i naziva plastičnim zglobom.

Štapovi s jednostruko simetričnim presjekom. Razmatra se savijanje štapa kojega presjek ima jednu os simetrije (z na sl. 12) i koji se savija oko osi okomite na os simetrije (os y).

Analiza naprezanja štapa pri djelomičnoj plastifikaciji poprečnog presjeka složenija je od analize štapova s presjekom s dvije osi simetrije. Tada neutralna os ne prolazi težištem poprečnog presjeka i njezin položaj tek treba odrediti. Položaj neutralne osi određuje se (v. *Nauka o čvrstoći*, TE 9, str. 301) iz uvjeta

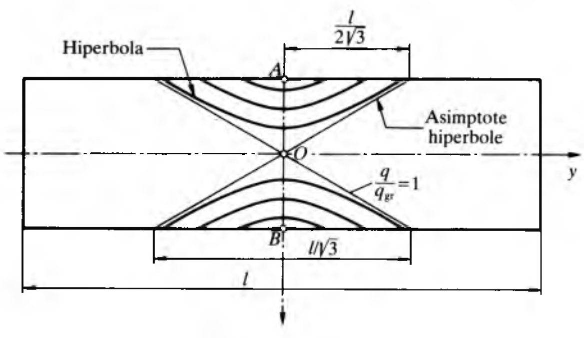
$$N = \int_A \sigma_x \mathrm{d}A = 0. \tag{29}$$

U trenutku potpune plastifikacije presjeka i stvaranja plastičnog zgloba, neutralna linija dijeli poprečni presjek u dva dijela koja imaju jednaku površinu, pa je $A_1 = A_2 = A/2$, gdje je A ukupna površina poprečnog presjeka. Na jednom je dijelu naprezanje jednako vlačnoj granici tečenja σ_T, a na drugom $-\sigma_\mathrm{T}$, pa je ukupna sila u poprečnom presjeku

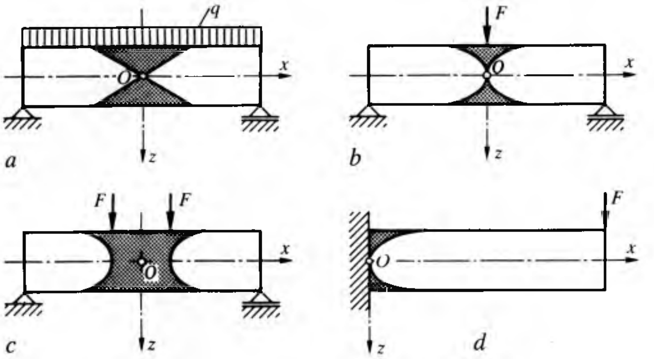
$$N = \sigma_\mathrm{T} A_1 - \sigma_\mathrm{T} A_2 = 0, \tag{30}$$

što potvrđuje da je $A_1 = A_2$.

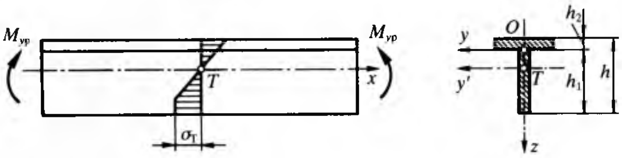
Dok je $M_y \leqq M_{y\mathrm{T}}$, neutralna linija prolazi težištem poprečnog presjeka. Kad je $M_{y\mathrm{T}} < M_{y\mathrm{p}} < M_{y\mathrm{gr}}$, neutralna se linija



Sl. 10. Širenje plastičnih područja grede sa sl. 9



Sl. 11. Plastični zglob: *a* na kontinuirano opterećenoj gredi, *b* na gredi opterećenoj koncentriranom silom, *c* na gredi opterećenoj dvjema silama, *d* na konzoli opterećenoj silom na kraju



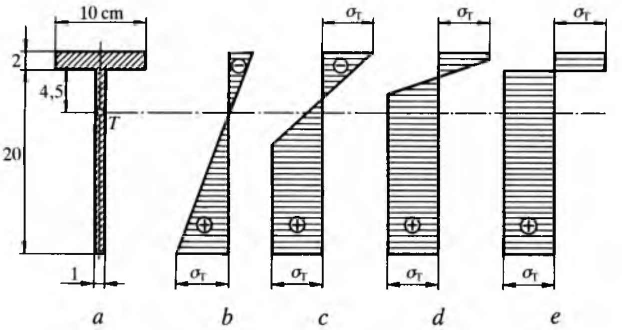
Sl. 12. Plastično savijanje štapa kojemu je presjek s jednom osi simetrije

nalazi između dva krajnja položaja. Kad je $M_{yp} = M_{ygr}$, neutralna linija dijeli presjek u dva jednaka dijela (sl. 13).

Kad presjek postane potpuno plastificiran, za raspodjelu naprezanja vrijede izrazi:

$$\sigma_x = \sigma_T, \quad -h_1 \leqq z < 0 \quad (\text{na površini } A_1), \tag{31a}$$

$$\sigma_x = -\sigma_T, \quad 0 < z \leqq -h_2 \quad (\text{na površini } A_2). \tag{31b}$$



Sl. 13. Pomicanje neutralne linije i raspodjela naprezanja pri savijanju štapa kojemu je presjek s jednom osi simetrije. *a* presjek štapa, *b* raspodjela naprezanja za $M_y = M_{yT}$, *c* i *d* za $M_{yT} < M_y < M_{ygr}$, *e* za $M_y = M_{ygr}$

Tada je granični moment savijanja

$$M_{ygr} = \int_A \sigma_x z \,\mathrm{d}A = \sigma_T \int_{A_1} z \,\mathrm{d}A - \sigma_T \int_{A_2} z \,\mathrm{d}A, \tag{32}$$

odnosno

$$M_{ygr} = \sigma_T (S_1 + S_2) = \sigma_T W_{yp}, \tag{33}$$

gdje su S_1 i S_2 apsolutne vrijednosti statičkih momenata površina A_1 i A_2 oko osi y koja dijeli presjek u dva jednaka dijela. Plastični je moment otpora presjeka

$$W_{yp} = S_1 + S_2. \tag{34}$$

Uvijanje

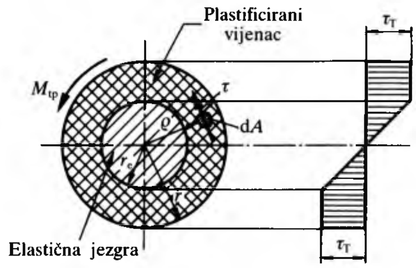
Uvijanje okruglih štapova. Za uvijanje vrijede iste pretpostavke o deformiranju kao i u nauci o čvrstoći (v. *Nauka o čvrstoći,* TE 9, str. 298), pa je

$$\gamma = \varrho \vartheta = \gamma_{max} \frac{\varrho}{r}, \tag{35}$$

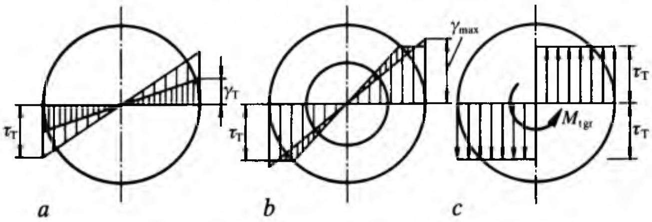
gdje je γ kutna deformacija, ϱ promatrani promjer, ϑ relativni kut uvijanja, a r vanjski promjer. To znači da su deformacije u plastičnom kao i u elastičnom području linearno raspodijeljene (sl. 14). Prve se plastične deformacije pojavljuju kad moment uvijanja M_{tT} bude:

$$M_{tT} = \tau_T W_p, \tag{36}$$

gdje je τ_T granica tečenja pri smicanju, a W_p plastični moment otpora (sl. 15).



Sl. 14. Uz izvod izraza za moment uvijanja osovine u elastoplastičnom stanju



Sl. 15. Raspodjela kutnih deformacija γ i posmičnog naprezanja τ_T po presjeku kružnog štapa: *a* za $M_t = M_{tT}$, *b* za $M_{tT} < M_y < M_{tgr}$, *c* za $M_t = M_{tgr}$

Kad se moment uvijanja poveća iznad M_{tT}, po rubu presjeka nastaju plastične deformacije koje se u obliku koncentričnog vijenca šire prema središtu presjeka. U plastičnom su vijencu posmična naprezanja τ_T, a u elastičnoj jezgri rastu linearno od nule do τ_T:

$$\tau = \frac{\tau_T}{r_e} \varrho \qquad 0 \leqq \varrho \leqq r_e, \tag{37a}$$

$$\tau = \tau_T \qquad r_e \leqq \varrho \leqq r, \tag{37b}$$

gdje je r_e polumjer elastične jezgre. Vrijednost je momenta uvijanja u elastoplastičnom stanju:

$$M_{tp} = \int_A \tau \varrho \,\mathrm{d}A = \frac{\tau_T}{r_e} \int_{A_e} \varrho^2 \,\mathrm{d}A + \tau_T \int_{A_p} \varrho \,\mathrm{d}A, \tag{38}$$

gdje je A ukupna površina, A_e površina elastične jezgre, a A_p površina plastičnog vijenca.

Prvi integral na desnoj strani izraza (38) jednak je polarnome momentu tromosti elastične jezgre I_{pe}. Ako je $\mathrm{d}A = 2\pi\varrho \,\mathrm{d}\varrho$, izraz (38) prelazi u oblik:

$$M_{tp} = \tau_T \left(\frac{I_{pe}}{r_e} + 2\pi \tau_T \int_{r_e}^{r} \varrho^2 \,\mathrm{d}\varrho \right), \tag{39}$$

odnosno

$$M_{tp} = \tau_T \left[W_{pe} + \frac{2}{3} \pi (r^3 - r_e^3) \right], \tag{40}$$

gdje je $W_{pe} = I_{pe}/r_e$ polarni moment otpora elastične jezgre.

Kako je $W_{pe} = \pi d_e^3/16 = \pi r_e^3/2$, izraz (40) prelazi u oblik:

$$M_{tp} = \tau_T \frac{r^3 \pi}{6} \left[4 - \left(\frac{r_e}{r} \right)^3 \right] = \frac{1}{3} M_{tT} \left[4 - \left(\frac{r_e}{r} \right)^3 \right]. \tag{41}$$

Kad r_e teži nuli, M_{tp} teži graničnoj vrijednosti M_{tgr}, pa je

$$M_{tgr} = \tau_T \frac{2}{3} r^3 \pi = \frac{\pi d^3}{12} \tau_T = \tau_T W_{pp}, \tag{42}$$

gdje je

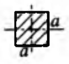
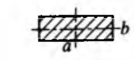
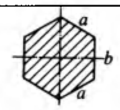
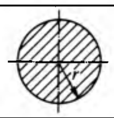
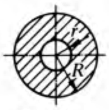
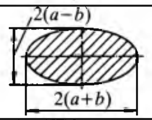
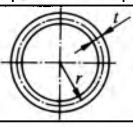
$$W_{pp} = \frac{\pi d^3}{12} \tag{43}$$

plastični polarni moment otpora. Povećanje nosivosti kružnog presjeka u plastičnom stanju (tabl. 3) prema elastičnom stanju iznosi

$$k_t = \frac{M_{tgr}}{M_{tT}} = \frac{W_{pp}}{W_p} = \frac{4}{3} = 1{,}33. \tag{44}$$

Tablica 3

POLARNI PLASTIČNI MOMENTI OTPORA I OMJERI POVEĆANJA NOSIVOSTI U PLASTIČNOM STANJU

Presjek	W_{pp}	W_p ili W_t	$k_t = W_{pp}/W_p$
	$\frac{a^3}{12}$	$\frac{a^3}{20}$	$1{,}667 = 5/3$
	$\frac{a^3}{3}$	$\frac{5a^3}{24}$	$1{,}6$
	$\frac{ab^2}{2}\left(1-0{,}333\frac{b}{a}\right)$	$\frac{1}{3}\cdot\frac{ab^2}{1+0{,}6b/a}$	$\frac{3}{2}\left(1-0{,}333\frac{b}{a}\right)\left(1+0{,}6\frac{b}{a}\right)$
	$\frac{3}{2}a^3$	$0{,}982a^3$	$1{,}527$
	$\frac{\pi d^3}{12}$	$\frac{\pi d^3}{16}$	$\frac{4}{3}=1{,}333$
	$\frac{2}{3}\pi R^3\left[1-\left(\frac{r}{R}\right)^3\right]$	$\frac{\pi}{2}R^3\left[1-\left(\frac{r}{R}\right)^4\right]$	$\frac{4}{3}\cdot\frac{1-\left(\frac{r}{R}\right)^3}{1-\left(\frac{r}{R}\right)^4}$
	$\frac{2}{3}\pi\left(a^3-\frac{9}{2}ab^2+4b^3\right)$	$\frac{\pi}{2}(a+b)(a-b)^2$	$\frac{4}{3}\cdot\frac{1-\frac{a}{2}\left(\frac{b}{a}\right)^2+4\left(\frac{b}{a}\right)^3}{\left(1+\frac{b}{a}\right)\left(1-\frac{b}{a}\right)^2}$
	$2\pi r^2 t$	$\sim 2\pi r^2 t$	~ 1

To znači da kružni presjek u plastičnom stanju može preuzeti moment koji je 33% veći od maksimalnog momenta u elastičnom stanju.

Uvijanje štapova neokrugla presjeka. Analiza štapova neokrugla presjeka mnogo je složenija od analize štapova okrugla, tj. kružnog presjeka. Zato se navode samo osnovni pojmovi i rezultati. Pomoću funkcije naprezanja $F = F(y,z)$ određuju se komponente naprezanja:

$$\tau_{xy} = \frac{\partial F}{\partial z}, \qquad \tau_{xz} = -\frac{\partial F}{\partial y}. \tag{45}$$

U plastičnom području komponente naprezanja zadovoljavaju jednadžbu

$$\tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2 = \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 = \tau_T^2. \tag{46}$$

Rubni uvjet glasi da je $\mathrm{d}F = 0$ uzduž ruba presjeka. Površina je plastičnog naprezanja površina jednaka nagiba:

$$\varphi = \arctan \tau_T. \tag{47}$$

U trenutku potpune plastifikacije poprečnog presjeka površina dobiva oblik krova ili šatora (sl. 16). Takve se površine mogu odrediti eksperimentalno tako da se na poprečni presjek koji leži vodoravno nasipa materijal kojemu je kut unutrašnjeg trenja jednak φ (47).

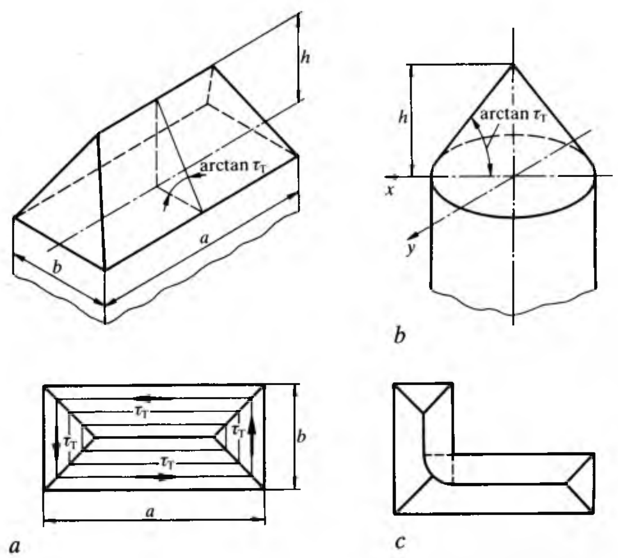
Granični moment uvijanja jednak je dvostrukom obujmu V_0 što ga zatvaraju površina $F(y,z)$ iz relacije (45) i ravnina poprečnog presjeka, pa je

$$M_{tgr} \mathrel{\hat{=}} 2V_0. \tag{48}$$

Za kružni je presjek $h = r\tau_T$, pa je

$$M_{tgr} = \frac{2}{3}\pi r^3 \tau_T. \tag{49}$$

Slično je za pravokutni presjek:



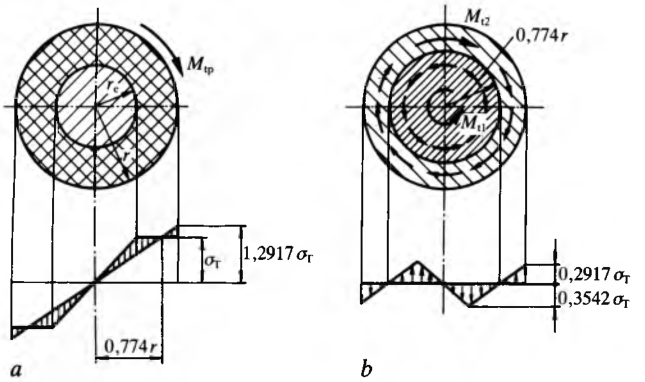
Sl. 16. Površina plastičnog naprezanja $F(y,z)$. *a* pravokutni presjek, *b* kružni presjek, *c* L-presjek

$$V_0 = b^2\frac{h}{3} + (a-b)b\frac{h}{2}, \tag{50}$$

pa kako je $\tau_T = 2h/b$, slijedi

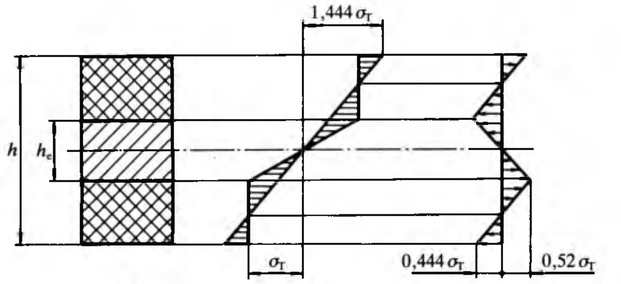
$$M_{tgr} = \frac{bh}{6}(3a-b)\tau_T. \tag{51}$$

Zaostala naprezanja. Kad se poprečni presjek štapa djelomično plastificira, pa zatim rastereti, onda se dio štapa koji je ostao u elastičnom stanju nastoji vratiti u prvobitan oblik, dok dio koji je u plastičnom stanju nastoji zadržati deformirani oblik. Zbog toga nastaju samouravnotežena naprezanja koja nisu posljedica vanjskog opterećenja. Kako je rasterećenje nakon plastičnog deformiranja uvijek linearno, zaostala se naprezanja mogu odrediti superpozicijom dijagrama naprezanja koje bi nastalo kad bi se elastični štap opteretio momentom (ili silom) suprotna smjera, a iznosa jednaka iznosu momenta (sile) koji je prouzrokovao plastičnu deformaciju.



a b

Sl. 17. Zaostala naprezanja nakon plastičnog uvijanja okruglog štapa sa $r_e = r/2$. *a* presjek štapa te superponirani dijagrami raspodjele naprezanja i linearnog elastičnog porasta, *b* dijagram raspodjele zaostalih naprezanja



a b c

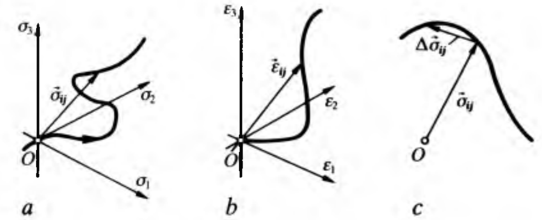
Sl. 18. Zaostala naprezanja nakon plastičnog savijanja štapa pravokutnog presjeka sa $h_e = h/3$. *a* presjek štapa, *b* dijagram naprezanja, *c* rezultirajući dijagram zaostalih naprezanja

Kružni je štap (sl. 17) opterećen momentom uvijanja M_{tp} tako da mu je polumjer elastične jezgre jednak polovici polumjera cijelog presjeka. Na slici je i pripadni dijagram raspodjele naprezanja u elastoplastičnom stanju (sl. 17a) i dijagram raspodjele zaostalih naprezanja (sl. 17b). Prema (41), uz $r_e = r/2$, vrijedi $M_{tp} = 1{,}2917\,M_{tT} = 1{,}2917\,W_y\sigma_T$, tj. maksimalno naprezanje elastičnog rasterećenja iznosi $1{,}2917\,\sigma_T$. Pravokutni je poprečni presjek (sl. 18) djelomično plastificiran tako da mu je visina elastične jezgre $h_e = h/3$. Prema (17) vrijedi da je $M_{yp} = 1{,}444\,W_y\sigma_T$, pa je maksimalno naprezanje elastičnog rasterećenja $1{,}444\,\sigma_T$.

MEĐUSOBNA OVISNOST NAPREZANJA I DEFORMACIJE

Osnovne jednadžbe za prostorno stanje naprezanja. Promjene naprezanja σ_{ij} u nekoj točki tijela nazivaju se *procesom opterećenja* u toj točki, a promjene deformacija ε_{ij} *procesom deformiranja.* Prijelazom na šesterodimenzijski prostor, u kojem su koordinate komponente tenzora naprezanja, može se tenzor naprezanja prikazati kao vektor naprezanja $\vec{\sigma}_{ij}$, a tenzor deformacije kao vektor deformacije $\vec{\varepsilon}_{ij}$. Taj se prostor naziva faznim prostorom (sl. 19). Ako se razmatranje ograniči na trodimenzijski fazni prostor σ_1, σ_2, σ_3, odnosno ε_1, ε_2, ε_3, može se u njemu prikazati proces opterećenja, odnosno proces deformacije. Vrh vektora $\vec{\sigma}_{ij}$ opisuje trajektoriju opterećenja, a vrh vektora $\vec{\varepsilon}_{ij}$ trajektoriju deformacije.

Poopćenjem granice tečenja na troosno stanje naprezanja dolazi se do pojma površine tečenja, odnosno krivulje tečenja kad se radi o ravninskom naprezanju. Površina tečenja u faznom prostoru dijeli prostor elastičnih od prostora plastičnih deformacija. Kad se trajektorija opterećenja potpuno nalazi unutar površine tečenja, deformacije su elastične. Da bi nastale plastične deformacije mora se kraj trajektorije naprezanja nalaziti na površini tečenja. Kad se radi o idealno plastičnim materijalima, površina je tečenja nepomična. Ako je materijal očvrstiv deformiranjem, mijenjaju se oblik i veličina površine tečenja, a površina se može i pomicati u faznom prostoru.



a b c

Sl. 19. Trajektorije opterećivanja i deformiranja u faznim prostorima: *a* trajektorija opterećivanja u trodimenzijskom faznom prostoru, *b* trajektorija deformiranja u trodimenzijskom faznom prostoru, *c* trajektorija deformiranja u šesterodimenzijskom faznom prostoru

Kad se radi o idealno plastičnome materijalu, površina tečenja pri izotermnom deformiranju ima oblik:

$$f = f(\sigma_{ij}, \varkappa_j) = 0, \tag{52}$$

gdje su $\varkappa_j$ konstante materijala. Za opisivanje ponašanja mnogih izotropnih idealno plastičnih materijala dovoljna je samo jedna takva konstanta. Gotovo se redovito promatra granica tečenja pri rastezanju. Tada za površinu tečenja vrijedi jednadžba

$$f(\sigma_{ij}, \sigma_T) = 0. \tag{53}$$

Analitički izraz za površinu tečenja materijalâ očvrstivih deformiranjem glasi

$$f = f(\sigma_{ij}, \varepsilon^p_{ij}, \varkappa^p_j) = 0, \tag{54}$$

gdje je ε^p_{ij} tenzor plastične deformacije, a $\varkappa^p_j$ svojstva materijala koja ovise o veličini i tijeku promjene plastične deformacije ε^p_{ij}. Izraz koji analitički prikazuje površinu tečenja naziva se *kriterijem tečenja,* odnosno uvjetom tečenja.

Kraj vektora naprezanja $\vec{\sigma}_{ij}$ nalazi se uvijek unutar površine tečenja ili na njoj samoj. To vrijedi i za očvrstive materijale. Neka se vrh naprezanja nalazi na površini tečenja, koja se sada naziva površinom početka tečenja, pa ako komponente naprezanja porastu tako da $d\vec{\sigma}_{ij}$ gleda prema van, onda će se promijeniti i veličina površine tečenja, te će se kraj vektora $\vec{\sigma}_{ij} + d\vec{\sigma}_{ij}$ opet nalaziti na površini tečenja. Prema tome uvijek vrijedi:

$$df = \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij} + \frac{\partial f}{\partial \varepsilon^p_{ij}} d\varepsilon^p_{ij} + \frac{\partial f}{\partial \varkappa^p_j} d\varkappa^p_j = 0. \tag{55}$$

Kad je $f < 0$, okoliš je točke koja se promatra u elastičnom stanju. Kad je $f = 0$, ispunjen je neophodan uvjet za pojavu plastičnih deformacija. Uvjet $f > 0$ nema smisla, jer vrh vektora $\vec{\sigma}_{ij}$ ne može napustiti površinu tečenja.

Aktivno opterećenje uzrokuje promjenu naprezanja uz pojavu plastičnih deformacija. *Pasivno opterećenje* (rasterećenje) uzrokuje promjenu naprezanja kad se ne pojavljuju plastične deformacije. Neutralno opterećenje granični je slučaj između aktivnog i pasivnog opterećenja.

Neka se vrh vektora $\vec{\sigma}_{ij}$ nalazi na površini tečenja. Ako djeluje pasivno opterećenje, vrh vektora $\vec{\sigma}_{ij}$ prelazi u unutrašnjost površine tečenja. Uz takvu promjenu naprezanja mora biti $df < 0$. Kako je $d\varepsilon^p_{ij} = 0$ i $d\varkappa_j = 0$, mora biti

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij} < 0. \tag{56}$$

Prema tome, ako je $f = 0$, tada je:

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij} < 0 \quad \text{za pasivno opterećenje,} \tag{57a}$$

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij} = 0 \quad \text{za neutralno opterećenje,} \tag{57b}$$

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \mathrm{d}\sigma_{ij} > 0 \quad \text{za aktivno opterećenje.} \tag{57c}$$

Kad je opterećenje neutralno, vrh se vektora $\bar{\sigma}_{ij}$ miče po površini tečenja koja ne mijenja oblik. Ako je materijal idealno plastičan, nastaju plastične deformacije, a ako je materijal očvrstiv deformiranjem, ne nastaju plastične deformacije.

Druckerov postulat. D. C. Drucker je (1951) formulirao postulat koji glasi: ako u tijelu vlada početno naprezanje σ^0_{ij} i na takvo tijelo izvana djeluje bilo kakvo opterećenje koje uzrokuje dopunsko naprezanje σ^*_{ij} pa je ukupno naprezanje σ_{ij}, te ako se nakon uklanjanja vanjskog opterećenja tijelo vrati u početno stanje, onda vrijede sljedeće relacije:

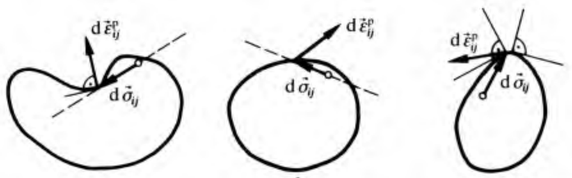
$$\sigma^*_{ij} = \sigma_{ij} - \sigma^0_{ij}, \tag{58a}$$

$$\oint_\sigma \sigma_{ij} \mathrm{d}\varepsilon_{ij} \geqq 0, \tag{58b}$$

$$\mathrm{d}\sigma_{ij} \mathrm{d}\varepsilon^{\mathrm{p}}_{ij} \geqq 0, \tag{58c}$$

što znači da plastična deformacija može nastati samo ako se utroši rad. Znak jednakosti vrijedi samo za neutralno opterećenje.

Na temelju Druckerova postulata može se zaključiti sljedeće: *a*) površina tečenja uvijek je konveksna i *b*) vektor prirasta plastičnih deformacija $\mathrm{d}\bar{\varepsilon}^{\mathrm{p}}_{ij}$ u regularnoj točki površine tečenja ima smjer vanjske normale. U singularnoj točki vektor $\mathrm{d}\bar{\varepsilon}_{ij}$ leži unutar stošca što ga određuju krajnje vanjske normale.



a *b* *c*

Sl. 20. Primjeri u kojima nije ispunjen Druckerov postulat: *a* površina tečenja nije konveksna, *b* prirast $\mathrm{d}\varepsilon^{\mathrm{p}}_{ij}$ nema smjer gradijenta na površinu, *c* prirast $\mathrm{d}\varepsilon^{\mathrm{p}}_{ij}$ nije unutar stošca tangenata u singularnoj točki

Ako se ne ispuni jedan od ta dva uvjeta, može se dogoditi da bude $\mathrm{d}\varepsilon^{\mathrm{p}}_{ij} \cdot \mathrm{d}\sigma_{ij} < 0$, što proturječi Druckerovu postulatu. Tada bi, naime, bilo moguće odabrati takve vrijednosti za $\mathrm{d}\bar{\sigma}_{ij}$ i $\mathrm{d}\bar{\varepsilon}_{ij}$ da bi kut među njima bio tup (sl. 20). Budući da vektor prirasta plastičnih deformacija ima smjer gradijenta na površinu tečenja, to je

$$\mathrm{d}\varepsilon^{\mathrm{p}}_{ij} = \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \mathrm{d}\lambda, \qquad f = 0, \qquad \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \mathrm{d}\sigma_{ij} \geqq 0, \tag{59}$$

gdje je $\mathrm{d}\lambda$ skalarni multiplikator.

Lévy-Misesove jednadžbe. Kad je f jednako drugoj invarijanti devijatora naprezanja s_{ij}, tj. kad je $f = I_{2s}$, onda je

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} = s_{ij}, \tag{60}$$

pa je prema (59)

$$\mathrm{d}\varepsilon^{\mathrm{p}}_{ij} = s_{ij} \mathrm{d}\lambda. \tag{61}$$

Prirast komponenata plastične deformacije razmjeran je komponentama devijatora naprezanja. Ako se zanemare elastične deformacije u usporedbi s plastičnima, tada je

$$\mathrm{d}\varepsilon_{ij} = s_{ij} \mathrm{d}\lambda. \tag{62}$$

To su Lévy-Misesove jednadžbe koje vrijede za kruto-idealno plastični materijal.

Prandtl-Reussove jednadžbe. Te jednadžbe uzimaju u obzir i elastične deformacije. Hookeov zakon za elastične deformacije u devijatorskom obliku glasi

$$e_{ij} = \frac{s_{ij}}{2G}, \qquad \varepsilon_{kk} = \frac{\sigma_{kk}}{3K}, \tag{63}$$

gdje su e_{ij} i s_{ij} devijatori deformacije, odnosno naprezanja:

$$e_{ij} = \varepsilon_{ij} - \frac{1}{3}\varepsilon_{kk}\delta_{ij} = \varepsilon_{ij} - \varepsilon_0 \delta_{ij}, \tag{64}$$

$$s_{ij} = \sigma_{ij} - \frac{1}{3}\sigma_{kk}\delta_{ij} = \sigma_{ij} - \sigma_0 \delta_{ij}, \tag{65}$$

a G je modul smicanja i K prostorni modul elastičnosti.

Tada Prandtl-Reussove jednadžbe glase:

$$\mathrm{d}\varepsilon_{ij} = s_{ij}\mathrm{d}\lambda + \frac{\mathrm{d}s_{ij}}{2G}, \tag{66a}$$

$$\mathrm{d}\varepsilon_{kk} = \frac{\mathrm{d}\sigma_{kk}}{3K}, \tag{66b}$$

$$s_{ij}s_{ij} = 2k^2. \tag{66c}$$

Izraz (66c) predstavlja von Misesov kriterij tečenja materijala. Na temelju gornjih jednadžbi može se izvesti

$$\frac{\mathrm{d}\varepsilon^{\mathrm{p}}_1 - \mathrm{d}\varepsilon^{\mathrm{p}}_2}{\sigma_1 - \sigma_2} = \frac{\mathrm{d}\varepsilon^{\mathrm{p}}_2 - \mathrm{d}\varepsilon^{\mathrm{p}}_3}{\sigma_2 - \sigma_3} = \frac{\mathrm{d}\varepsilon^{\mathrm{p}}_3 - \mathrm{d}\varepsilon^{\mathrm{p}}_1}{\sigma_3 - \sigma_1} = \mathrm{d}\lambda. \tag{67}$$

Parametar $\mathrm{d}\lambda$ može se odrediti eksperimentalno na temelju tog izraza. Pogodnije je odrediti $\mathrm{d}\lambda$ uvođenjem pojmova intenzivnosti naprezanja $\bar{\sigma}$, intenzivnosti deformacije $\bar{\varepsilon}$ i intenzivnosti prirasta plastične deformacije $\mathrm{d}\bar{\varepsilon}^{\mathrm{p}}$. Oni su definirani izrazima:

$$\bar{\sigma} = \sqrt{\frac{1}{2}\left[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2\right]} = \sqrt{\frac{3}{2} s_{ij} s_{ij}}, \tag{68a}$$

$$\bar{\varepsilon} = \sqrt{\frac{2}{9}\left[(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2 + (\varepsilon_2 - \varepsilon_3)^2 + (\varepsilon_3 - \varepsilon_1)^2\right]} = \sqrt{\frac{3}{2} e_{ij} e_{ij}}, \tag{68b}$$

$$\mathrm{d}\bar{\varepsilon}^{\mathrm{p}} = \sqrt{\frac{2}{3} \mathrm{d}\varepsilon^{\mathrm{p}}_{ij} \mathrm{d}\varepsilon^{\mathrm{p}}_{ij}}. \tag{68c}$$

Uvrštavanjem (68a) i (68c) u (61) dobiva se

$$\mathrm{d}\lambda = \frac{3}{2} \cdot \frac{\mathrm{d}\bar{\varepsilon}^{\mathrm{p}}}{\mathrm{d}\bar{\sigma}}, \tag{69}$$

odnosno

$$\mathrm{d}\varepsilon^{\mathrm{p}}_{ij} = \frac{3}{2} \cdot \frac{\mathrm{d}\bar{\varepsilon}^{\mathrm{p}}}{\mathrm{d}\bar{\sigma}} s_{ij}. \tag{70}$$

Teorija potpune plastične deformacije. Porast plastične deformacije u biti je inkrementalne prirode, kako to opisuje izraz (61). H. Hencky je pokušao (1924), slično kao u teoriji elastičnosti, uspostaviti ovisnost između potpunih (totalnih) plastičnih deformacija i naprezanja. Pretpostavio je da su komponente potpune plastične deformacije $\varepsilon^{\mathrm{p}}_{ij}$ proporcionalne komponentama devijatora naprezanja prema izrazu

$$\varepsilon^{\mathrm{p}}_{ij} = \varphi s_{ij}, \tag{71}$$

gdje je φ faktor proporcionalnosti.

Ako se uzmu u obzir i elastične deformacije, Henckyjeve jednadžbe glase:

$$e_{ij} = \left(\varphi + \frac{1}{2G}\right) s_{ij}, \tag{72a}$$

$$\varepsilon_{ii} = \frac{\sigma_{ii}}{3K} = \frac{1 - 2\nu}{E} \sigma_{ii}, \tag{72b}$$

$$\varphi = \frac{3}{2} \cdot \frac{\bar{\varepsilon}^{\mathrm{p}}}{\bar{\sigma}}. \tag{72c}$$

Izrazi (72) daju rezultate koji zadovoljavaju ako deformacije monotono rastu i ostaju u području malih deformacija.

Kriteriji tečenja

Von Misesov i Trescin kriterij tečenja opisani su u člancima *Mehanika kontinuuma* (TE 8, str. 173) i *Nauka o* *čvrstoći* (TE 9, str. 277) kao teorija najveće distorzijske energije HMH, odnosno kao teorija najvećega posmičnog naprezanja. Oni vrlo dobro opisuju ponašanje plastičnih metala i njihovih legura te mnogih drugih materijala. Spomenuti se kriteriji osnivaju na pretpostavci da srednje normalno naprezanje ne utječe na pojavu plastičnih deformacija, pa su površine tečenja cilindrične površine kojima je os paralelna s hidrostatičkim pravcem $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$. Za mnoge materijale, međutim, u prvom redu za tla i stijene, ta pretpostavka ne vrijedi. Zbog toga se navode neki od brojnih kriterija koji se primjenjuju u teoriji plastičnosti.

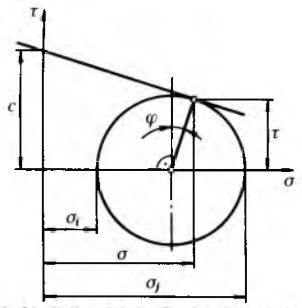
Mohr-Coulombov kriterij. Tečenje materijala nastaje kad posmično naprezanje τ u bilo kojem presjeku dosegne kritičnu vrijednost koja je razmjerna normalnome tlačnom naprezanju povećanom za neku konstantu c. Ako je normalno naprezanje vlačno, onda ima negativan predznak:

$$\tau = c - \sigma \tan\varphi, \tag{73}$$

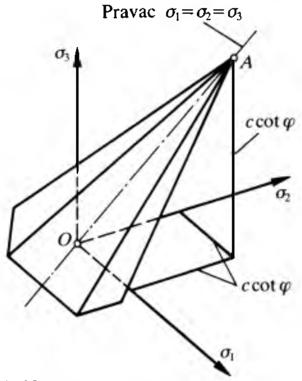
gdje je c smična čvrstoća kad nema normalnog naprezanja (kohezija), σ normalno naprezanje, a φ kut unutrašnjeg trenja. Taj je izraz prikazan Mohrovom kružnicom naprezanja (sl. 21), prema kojoj vrijedi:

$$\sigma = \frac{1}{2}(\sigma_j + \sigma_i) + \tau \tan\varphi, \tag{74a}$$

$$\tau = \frac{1}{2}(\sigma_j - \sigma_i)\cos\varphi. \tag{74b}$$



Sl. 21. Prikaz Mohr-Coulombova kriterija Mohrovom kružnicom naprezanja



Sl. 22. Površina tečenja prema Mohr-Coulombovu kriteriju

Izrazi (74) predstavljaju zapravo tri grupe po dvije jednadžbe jer indeksi i i j poprimaju vrijednosti 1 i 2, 2 i 3, odnosno 3 i 1. Ako se ti izrazi uvrste u (73), dobiva se nakon sređivanja:

$$\sigma_j(1+\sin\varphi) - \sigma_i(1-\sin\varphi) = 2c\cos\varphi, \tag{75}$$

odnosno

$$\sigma_1(1+\sin\varphi) - \sigma_2(1-\sin\varphi) = \pm\, 2c\cos\varphi, \tag{76a}$$

$$\sigma_2(1+\sin\varphi) - \sigma_3(1-\sin\varphi) = \pm\, 2c\cos\varphi, \tag{76b}$$

$$\sigma_3(1+\sin\varphi) - \sigma_1(1-\sin\varphi) = \pm\, 2c\cos\varphi. \tag{76c}$$

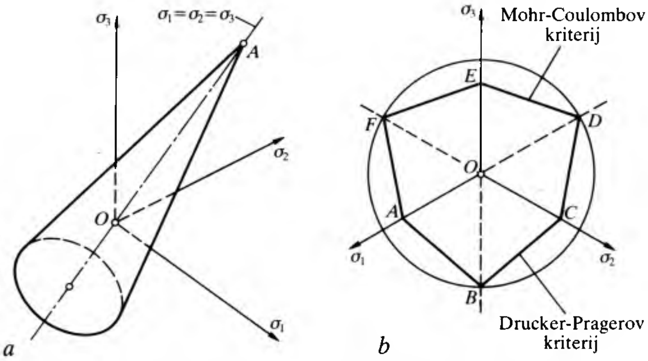
Tih šest jednadžbi predstavlja šest ravnina koje se sijeku tako da tvore nepravilnu uspravnu šesterostranu piramidu kojoj je os hidrostatički pravac $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$. Vrh piramide A (sl. 22) ima koordinate

$$\sigma_1^A = \sigma_2^A = \sigma_3^A = 2c\cot\varphi. \tag{77}$$

Drucker-Pragerov kriterij. D. C. Drucker i W. Prager predložili su (1952) kriterij koji je matematičko pojednostavnjenje Mohr-Coulombova kriterija. Utjecaj je hidrostatičkog naprezanja postignut uvođenjem prve invarijante naprezanja $I_{1\sigma}$ u von Misesov kriterij:

$$a I_{1\sigma} + (I_{2s})^2 = b, \tag{78}$$

gdje su a i b određeni vrijednostima c i φ iz Mohr-Coulombova kriterija, a I_{2s} je druga invarijanta devijatora naprezanja.



Sl. 23. Drucker-Pragerov kriterij. *a* površina tečenja, *b* presjek devijatorskom ravninom

Prema Drucker-Pragerovu kriteriju površina je tečenja uspravan kružni stožac (sl. 23a) oko Mohr-Coulombove piramide. Ako stožac prolazi kroz tri vanjska brida piramide (sl. 23b), konstante a i b imaju vrijednosti:

$$a = \frac{2\sin\varphi}{\sqrt{3}(3-\sin\varphi)}, \qquad b = \frac{6c\cos\varphi}{\sqrt{3}(3-\sin\varphi)}. \tag{79}$$

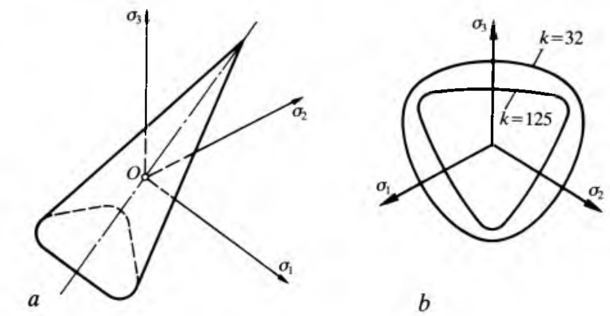
Kad plašt stošca prolazi unutrašnjim bridovima, tada je

$$a = \frac{2\sin\varphi}{\sqrt{3}(3+\sin\varphi)}, \qquad b = \frac{6c\cos\varphi}{\sqrt{3}(3+\sin\varphi)}. \tag{80}$$

Lade-Duncanov kriterij. P. V. Lade i J. M. Duncan predložili su (1975) kriterij u obliku

$$I_{1\sigma}^3 - k I_{3\sigma} = 0, \tag{81}$$

gdje su $I_{1\sigma}$ i $I_{3\sigma}$ prva i treća invarijanta tenzora naprezanja. Taj je kriterij pogodan za tla bez kohezije. Konstanta k određuje se empirijski. Površina tečenja ima oblik oblog stošca (sl. 24a) kojemu je os hidrostatički pravac. Presjek stošca ovisi o vrijednosti konstante k (sl. 24b).



Sl. 24. Lade-Duncanov kriterij. *a* površina tečenja, *b* presjek devijatorskom ravninom

Bergov kriterij. C. A. Berg je (1969) predložio kriterij koji uzima u obzir lom materijala pri vlačnim naprezanjima. Površina se tečenja sastoji od von Misesova kružnog valjka polumjera S koji vrijedi dok je srednje normalno naprezanje σ_0 manje od neke vrijednosti P_I (sl. 25). Von Misesov je valjak u vlačnom (prvom) oktantu pokriven polovicom rotacijskog elipsoida. Poluosi su tog elipsoida S i P_0, tako da Bergov kriterij ima matematički oblik:

$$\sqrt{2I_{2s}} = S; \qquad -\infty \leqq \sigma_0 \leqq P_\mathrm{I} \tag{82a}$$

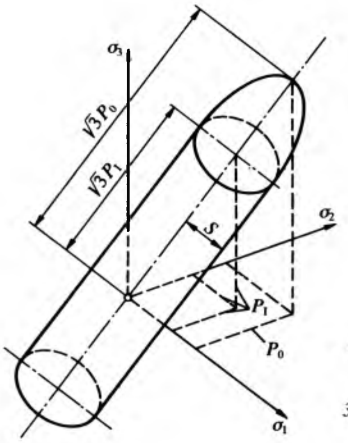
$$\sqrt{2I_{2s} + H(\sigma_0 - P_\mathrm{I}^2)} = S; \qquad P_\mathrm{I} \leqq \sigma_0 \leqq P_0, \tag{82b}$$

gdje je

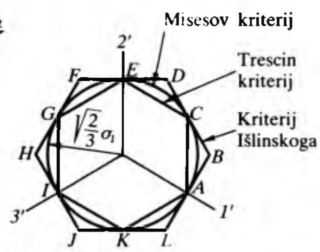
$$H = \left(\frac{S}{P_\mathrm{I} - P_0}\right)^2. \tag{83}$$

Konstante S, P_I i P_0 karakteristike su materijala i određuju se eksperimentalno.

Kriterij Išlinskoga. Trescin kriterij koji se naziva još i Tresca-Saint-Venantov kriterij ne uzima u obzir utjecaj glavnog naprezanja koje nije ni najveće ni najmanje. To je



Sl. 25. Površina tečenja prema Bergovu kriteriju



Sl. 26. Presjek devijatorskom ravninom površine tečenja prema kriteriju Išlinskoga

pokušao dopuniti A. Ju. Išlinski, koji je predložio (1940) kriterij u obliku:

$$\sigma_1 - \sigma_0 = +\frac{2}{3}\sigma_T, \tag{84a}$$

$$\sigma_2 - \sigma_0 = \pm\frac{2}{3}\sigma_T, \tag{84b}$$

$$\sigma_3 - \sigma_0 = \pm\frac{2}{3}\sigma_T. \tag{84c}$$

Taj kriterij ima površinu tečenja u obliku pravilne šesterostrane prizme kojoj je upisan von Misesov valjak (sl. 26).

NAPREZANJA U DEBELOSTJENIM POSUDAMA

Debela cijev. Na temelju rješenja u elastičnom području može se zaključiti da prve plastične deformacije u debeloj cijevi nastaju na unutrašnjoj stijenci i da se šire prema van. Neka je p_T unutrašnji tlak pri kojem nastaju prve plastične deformacije, a p_{gr} opterećenje pri kojem nastaje plastični slom. Ako je $p_T < p < p_{gr}$, unutrašnji je dio cijevi do polumjera r_T u plastičnom stanju, dok je vanjski dio cijevi, tj. za $r_T \leqq r \leqq r_2$, u elastičnom stanju. Prema teoriji elastičnosti naprezanja u elastičnom području σ^e jesu:

$$\sigma_r^e = 2k\left[A - \frac{B}{r^2}\right], \tag{85a}$$

$$\sigma_\varphi^e = 2k\left(A + \frac{B}{r^2}\right), \tag{85b}$$

$$\sigma_z^e = \frac{1}{2}(\sigma_r + \sigma_\varphi), \tag{85c}$$

gdje su A i B konstante integracije, a $k = \sigma_T/2$ za Trescin kriterij i $k = \sigma_T/\sqrt{3}$ za von Misesov kriterij.

Za određivanje naprezanja u plastičnom području na raspolaganju su diferencijalna jednadžba ravnoteže u polarnim koordinatama, koja za osno simetrične probleme glasi:

$$\frac{d\sigma_r}{dr} + \frac{\sigma_r - \sigma_\varphi}{r} = 0, \tag{86}$$

te kriterij tečenja:

$$\sigma_\varphi - \sigma_r = 2k. \tag{87}$$

Iz ta dva izraza slijedi

$$\frac{d\sigma_r}{dr} = \frac{2k}{r}, \tag{88}$$

pa su naprezanja σ^p u plastičnom području:

$$\sigma_r^p = 2k\left(\ln\frac{r}{r_T} + C\right), \tag{89a}$$

$$\sigma_\varphi^p = 2k\left(\ln\frac{r}{r_T} + C + 1\right), \tag{89b}$$

$$\sigma_z^p = 2k\left(\ln\frac{r}{r_T} + C + \frac{1}{2}\right). \tag{89c}$$

Tri se konstante integracije A, B i C te nepoznati polumjer elastoplastične granice r_T određuju na temelju dvaju rubnih uvjeta, te dvaju uvjeta kontinuiranosti naprezanja na elastoplastičnoj granici:

$$\text{za } r = r_1: \ \sigma_r = -p, \tag{90a}$$

$$\text{za } r = r_2: \ \sigma_r = 0, \tag{90b}$$

$$\text{za } r = r_T: \ \sigma_r^e = \sigma_r^p \ \text{ i } \ \sigma_\varphi^e = \sigma_\varphi^p. \tag{90c}$$

Gornji indeksi e i p odnose se na elastično i na plastično rješenje. Kad se odrede konstante, konačno rješenje, uz uvjet da je $r_1 \leqq r \leqq r_T$, glasi:

$$\sigma_r = k\left(\frac{r_T}{r_2}\right)^2\left[1 - \left(\frac{r_2}{r}\right)^2\right], \tag{91a}$$

$$\sigma_\varphi = k\left(\frac{r_T}{r_2}\right)^2\left[1 + \left(\frac{r_2}{r}\right)^2\right], \tag{91b}$$

$$\sigma_z = k\left(\frac{r_T}{r_2}\right)^2, \tag{91c}$$

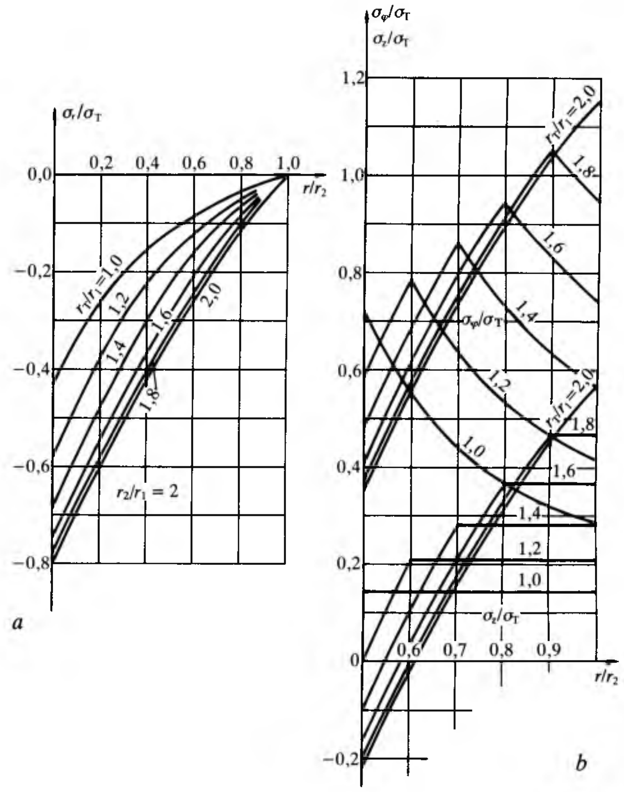
odnosno uz uvjet $r_T \leqq r \leqq r_2$:

$$\sigma_r = k\left[2\ln\frac{r}{r_T} + \left(\frac{r_T}{r_2}\right)^2 - 1\right], \tag{92a}$$

$$\sigma_\varphi = k\left[2\ln\frac{r}{r_T} + \left(\frac{r_T}{r_2}\right)^2 + 1\right], \tag{92b}$$

$$\sigma_z = k\left[2\ln\frac{r}{r_T} + \left(\frac{r_T}{r_2}\right)^2\right]. \tag{92c}$$

Polumjer se elastoplastične granice određuje pomoću izraza:



Sl. 27. Dijagrami raspodjele naprezanja u debeloj cijevi (omjer vanjskog i unutarnjeg polumjera $r_2/r_1 = 2$) za razne stupnjeve plastifikacije r_T/r_1 i razne vrijednosti omjera r/r_2. *a* dijagram σ_r/σ_T i *b* dijagram σ_φ/σ_T i σ_z/σ_T

$$p = k\left[2\ln\frac{r_T}{r_1} - \left(\frac{r_T}{r_2}\right)^2 + 1\right]. \tag{93}$$

Granično se opterećenje određuje iz uvjeta $r_T = r_2$, pa je

$$p_{gr} = 2k\ln\frac{r_2}{r_1}. \tag{94}$$

Dijagrami raspodjele naprezanja za $r_2/r_1 = 2$ i za različite vrijednosti r_T/r_2 prikazani su na sl. 27.

Debela sferna ljuska. Ako je naprezanje manje od p_T, tj. ako je

$$p < p_T = \frac{2}{3}\sigma_T\left[1 - \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^3\right], \tag{95}$$

ljuska je u elastičnom stanju, a naprezanja se određuju izrazima u sfernim koordinatama:

$$\sigma_r = p\frac{r_1^3}{r_2^3 - r_1^3}\left[1 - \left(\frac{r_2}{r}\right)^2\right], \tag{96a}$$

$$\sigma_\varphi = \sigma_\vartheta = p\frac{r_1^3}{r_2^3 - r_1^3}\left[1 + \frac{1}{2}\left(\frac{r_2}{r}\right)^3\right]. \tag{96b}$$

Kad je $p_T < p < p_{gr}$, ljuska je u elastoplastičnom stanju. Granica između oba stanja sferna je površina polumjera r_T koji se određuje pomoću izraza:

$$\frac{p}{2\sigma_T} = \ln\frac{r_T}{r_1} + \frac{1}{3}\left[1 - \left(\frac{r_T}{r_2}\right)^3\right]. \tag{97}$$

Naprezanja su u plastičnom području, uz uvjet da je $r_1 \leqq r \leqq r_T$:

$$\sigma_r = 2\sigma_T\ln\frac{r}{r_1} - p, \tag{98a}$$

$$\sigma_\vartheta = \sigma_\varphi = \sigma_T\left[1 + 2\ln\frac{r}{r_1}\right] - p, \tag{98b}$$

dok su naprezanja u plastičnom području za $r_T \leqq r \leqq r_2$:

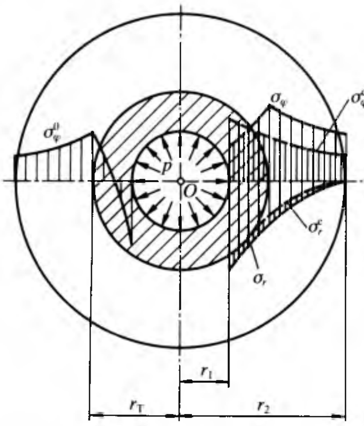
$$\sigma_r = -\frac{2}{3}\sigma_T\left(\frac{r_T}{r}\right)^3\left[1 - \left(\frac{r}{r_2}\right)^3\right], \tag{99a}$$

$$\sigma_\varphi = \frac{1}{3}\sigma_T\left(\frac{r_T}{r}\right)^3\left[1 + 2\left(\frac{r}{r_2}\right)^3\right]. \tag{99b}$$

Granično opterećenje (za $r_T = r_2$) iznosi prema (97):

$$p_{gr} = 2\sigma_T\ln\frac{r_2}{r_1}. \tag{100}$$

Raspodjela rastezanja u debeloj sfernoj ljusci u elastoplastičnom stanju prikazana je na sl. 28.



Sl. 28. Raspodjela naprezanja σ_r i σ_φ u debeloj sfernoj ljusci u elastoplastičnom stanju. U desnom dijelu slike crtkanim je linijama prikazana raspodjela naprezanja σ_r^e i σ_φ^e u elastičnom stanju, a u lijevom dijelu slike prikazano je zaostalo naprezanje σ_φ^0 nakon rasterećenja

PLASTIČNA ANALIZA RAVNINSKE DEFORMACIJE

Stanje ravninske deformacije. Ravninska deformacija u ravnini xy određena je uvjetima: $\varepsilon_x = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$ i $\sigma_z \neq 0$. U elastičnom je stanju

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E}[\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)] = 0, \tag{101}$$

tj.

$$\sigma_z = \nu(\sigma_x + \sigma_y). \tag{102}$$

Kako je u plastičnom području $\nu \approx 1/2$, to je

$$\sigma_z = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} = \sigma_0, \tag{103}$$

gdje je σ_0 srednje normalno naprezanje. Na temelju (102) slijedi

$$\sigma_x \geqq \sigma_z \geqq \sigma_y \quad \text{ili} \quad \sigma_x \leqq \sigma_z \leqq \sigma_y. \tag{104}$$

Ekstremna normalna naprezanja σ_1 i σ_3 leže u ravnini xy, a određuju se pomoću izraza:

$$\sigma_{1,3} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}, \tag{105}$$

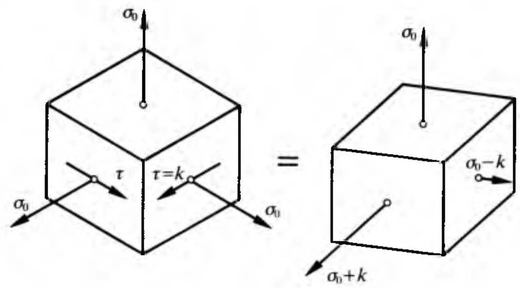
što se može pisati u obliku

$$\sigma_1 = \sigma_0 + k, \qquad \sigma_2 = \sigma_0, \qquad \sigma_3 = \sigma_0 - k, \tag{106}$$

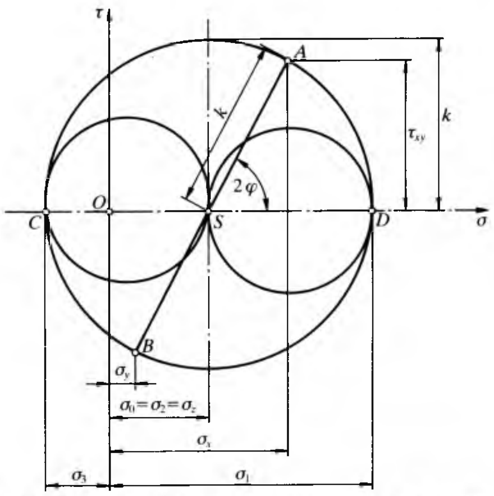
gdje je

$$k = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}. \tag{107}$$

U ravninskom stanju deformacije može se naprezanje rastaviti na zbroj vrijednosti hidrostatičkog naprezanja σ_0 i čistog smicanja k (sl. 29).



Sl. 29. Naprezanje pri ravninskoj deformaciji u plastičnom stanju može se rastaviti na hidrostatičko naprezanje σ_0 i čisto smicanje k



Sl. 30. Mohrova kružnica naprezanja za ravninsku deformaciju

Mohrova kružnica naprezanja prikazana je na sl. 30. Očito vrijede izrazi

$$\sigma_x = \sigma_0 + k\cos 2\varphi, \tag{108a}$$

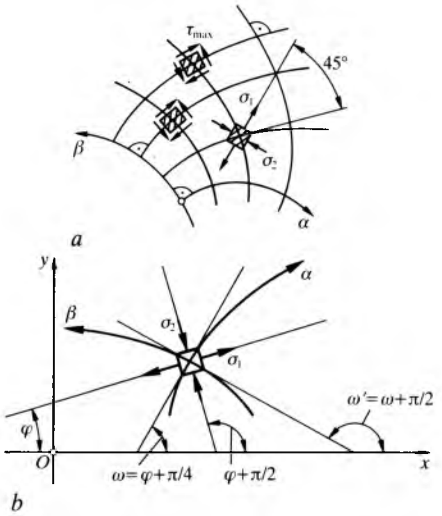
$$\sigma_y = \sigma_0 - k\cos 2\varphi, \tag{108b}$$

$$\tau_{xy} = k\sin 2\varphi. \tag{108c}$$

Metoda linija klizanja. Krivulja na kojoj je u svakoj točki maksimalno posmično naprezanje τ_{max} tangencijalno naziva se linijom klizanja (sl. 31). U svakoj su točki dva međusobno okomita presjeka na koja djeluju maksimalna posmična naprezanja, pa postoje dvije međusobno ortogonalne familije linija klizanja koje se nazivaju linije α i linije β. Linije klizanja sijeku trajektorije naprezanja pod kutom od 45° (sl. 31). Posmično naprezanje τ_{max} zatvara s osi x kut ω. Očito je

$$\omega = \varphi + \pi/4, \qquad 2\varphi = 2\omega - \pi/2, \tag{109}$$

gdje je φ kut koji σ_1 čini s osi x.



Sl. 31. Položaj linija klizanja i trajektorija naprezanja. *a* linije klizanja dvije su međusobno ortogonalne familije krivulja, *b* linije klizanja sijeku trajektorije naprezanja pod kutom od 45°

Kad se (109) uvrsti u (108), dobiva se:

$$\sigma_x = \sigma_0 + k\sin 2\omega, \tag{110a}$$

$$\sigma_y = \sigma_0 - k\sin 2\omega, \tag{110b}$$

$$\tau_{max} = -k\cos 2\omega. \tag{110c}$$

Kad nema obujamnih sila, jednadžbe ravnoteže glase:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0, \qquad \frac{\partial \sigma_y}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = 0. \tag{111}$$

Nakon uvrštenja (110) u (111) dobiva se:

$$\frac{\partial \sigma_0}{\partial x} + 2k\left(\cos 2\omega \frac{\partial \omega}{\partial x} + \sin 2\omega \frac{\partial \omega}{\partial y}\right) = 0, \tag{112a}$$

$$\frac{\partial \sigma_0}{\partial y} - 2k\left(\cos 2\omega \frac{\partial \omega}{\partial y} - \sin 2\omega \frac{\partial \omega}{\partial x}\right) = 0. \tag{112b}$$

Ako se ravnina xy odabere tako da u promatranoj točki bude $\omega = 0$, tada se u beskonačno malenu okolišu točke može uzeti da je

$$\mathrm{d}x = \mathrm{d}\alpha, \qquad \mathrm{d}y = \mathrm{d}\beta, \qquad \frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial \alpha}, \qquad \frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial \beta}, \tag{113}$$

pa izraz prelazi u oblik:

$$\frac{\partial}{\partial \alpha}(\sigma_0 + 2k\omega) = 0, \qquad \frac{\partial}{\partial \beta}(\sigma_0 - 2k\omega) = 0. \tag{114}$$

Odatle je

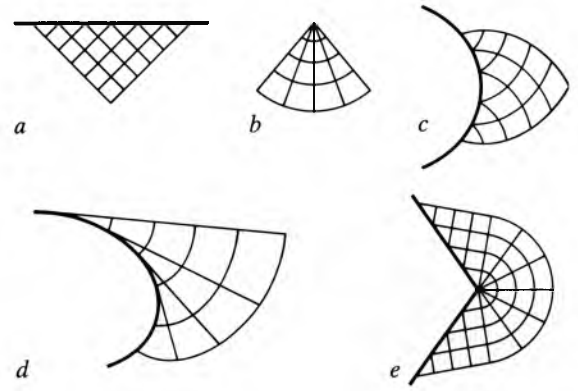
$$\sigma_0 + 2k\omega = f_1(\beta) \quad \text{na liniji } \alpha, \tag{115a}$$

$$\sigma_0 - 2k\omega = f_2(\alpha) \quad \text{na liniji } \beta. \tag{115b}$$

Neka točke M i N leže na istoj liniji klizanja i neka su σ_{0M} i σ_{0N} srednja normalna naprezanja u tim točkama, a ω_M i ω_N kutovi što ih tangente u točkama M i N čine s osi x. Tada je

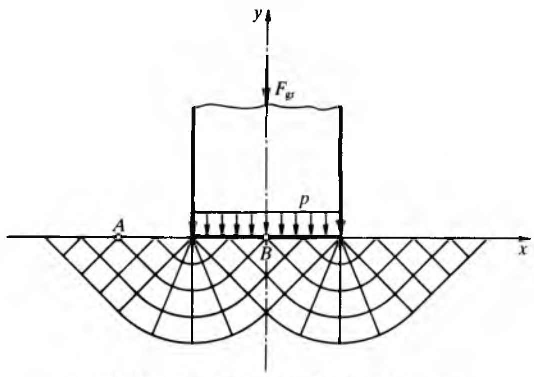
$$\sigma_{0M} - \sigma_{0N} = \pm 2k(\omega_M - \omega_N). \tag{116}$$

To znači da je promjena srednjega normalnog naprezanja uzduž linije klizanja razmjerna zakretu tangente. Pozitivni predznak odnosi se na liniju α, a negativni na liniju β.

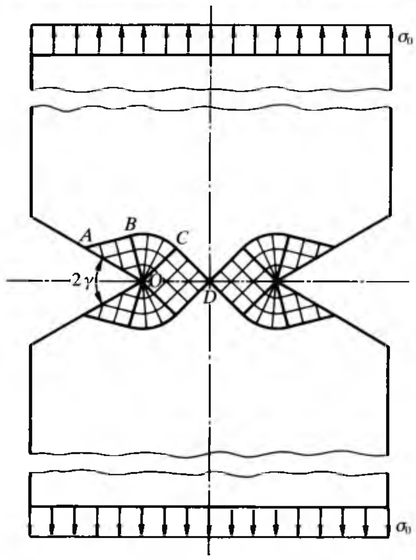


Sl. 32. Tipična polja linija klizanja. *a* homogeno polje, *b* centralno polje, *c* polje logaritamskih spirala, *d* polje evolvenata i pravaca, *e* prijelaz između dvaju homogenih polja jednak je centralnom polju

Na sl. 32 prikazana su neka tipična polja klizanja. Ako je poznato polje linija klizanja i ako je poznato srednje normalno naprezanje u jednoj od točaka polja, to je obično točka na rubu, onda se može odrediti naprezanje u bilo kojoj točki polja. Neka je točka A na rubu polja, a točka B u polju.



Sl. 33. Utiskivanje krutoga žiga u poluravninu



Sl. 34. Polje linija klizanja u rastegnutom štapu s dva oštra utora u obliku slova V

Tada su nepoznanice σ_x^A, σ_y^A, σ_x^B, σ_y^B. Za njihovo određivanje na raspolaganju su tri jednadžbe i jedan rubni uvjet. Naime, na rubu je poznato ili σ_x^A ili σ_x^B. Uvjet tečenja u točkama A i B glasi:

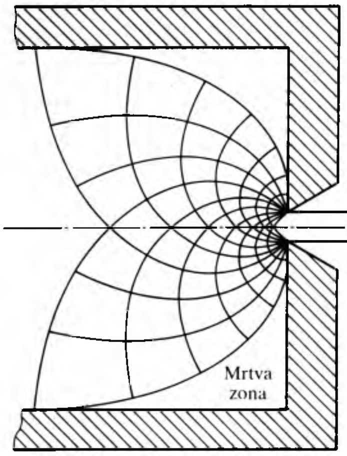
$$|\sigma_x^A - \sigma_y^A| = 2k \quad \text{i} \quad |\sigma_x^B - \sigma_y^B| = 2k. \tag{117}$$

Također je

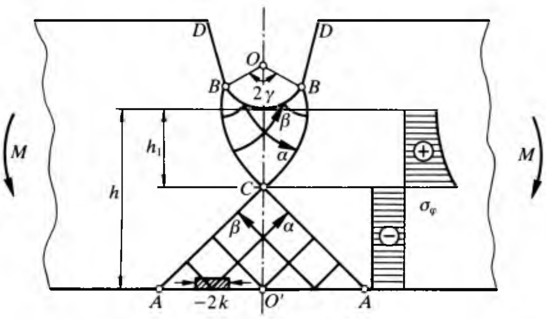
$$\sigma_0^A = \frac{1}{2}(\sigma_x^A + \sigma_y^A), \qquad \sigma_0^B = \frac{1}{2}(\sigma_x^B + \sigma_y^B), \tag{118}$$

pa je prema (116)

$$\sigma_0^A - \sigma_0^B = \pm 2k(\omega_A - \omega_B). \tag{119}$$



Sl. 35. Polje linija klizanja pri ekstruziji za omjer redukcije 12,5



Sl. 36. Polje linija klizanja u ploči s utorom koja je opterećena na savijanje. Gornji se dio polja sastoji od logaritamskih spirala, a donji je dio homogeno polje linija klizanja

Na sl. 33 prikazan je kruti žig koji se utiskuje u plastičnu poluravninu. U točki A poluravnine očito je $\sigma_y^A = 0$ i $\omega_A - \omega_B = -\pi/2$, pa je u točki B poluravnine $-\sigma_y^B = p = (2+\pi)k$, odnosno

$$F_{gr} = (2+\pi)kb, \tag{120}$$

gdje je $k = \sigma_T/2$ za Trescin, a $\sigma_T/\sqrt{3}$ za von Misesov kriterij. Slike 34, 35 i 36 prikazuju polja linija klizanja za neke primjere primjene metode linija klizanja.

LIT.: *Л. М. Качанов*, Основы теории пластичности. Наука, Москва 1969. – *В. В. Соколовский*, Теория пластичности. Висшая школа, Москва 1969. – *Н. Н. Малинин*, Прикладная теория пластичности и ползучести. Машиностроение, Москва 1975. – *В. Д. Клюшников*, Математическая теория пластичности. Издательство Московского университета, Москва 1979. – *H. Lippmann*, Mechanik des plastischen Fliessens. Grundlagen und technische Anwendungen. Springer-Verlag, Heidelberg 1981. – *H. Göldner*, Lehrbuch Höhere Festigkeitslehre. Physik-Verlag, Weinheim 1985. – *R. Hill*, The Mathematical Theory of Plasticity. Oxford University Press, New York 1985. – *D. R. J. Owen, E. Hinton*, Finite Elements in Plasticity, Theory and Practice. Pineridge Press, Swansea U. K. 1986. – *A. Borkowski*, Analysis of Skeletal Structural Systems in Elastic and Elastic-Plastic Range. PWN Warszawa and Elsevier, Amsterdam 1988.

I. Alfirević

TEORIJA SKUPOVA, grana matematike koja proučava odnose među općim kolektivima, posebno među beskonačnima. Prema njezinu osnivaču G. Cantoru (1845–1918) skup je ujedinjenje u cjelinu određenih, međusobno različitih predmeta našeg opažanja ili mišljenja. To se, međutim, ne može smatrati nekom klasičnom, eksplicitnom definicijom skupa i teorije skupova, niti je nešto takvo uopće moguće, jer je pojam skupa toliko osnovan i općenit da se ne može svesti na nešto još osnovnije i općenitije.

Točnije razumijevanje o čemu je riječ moguće je tek postepeno, prateći sâm razvoj i izgradnju teorije skupova. (Tako je, npr., nemoguća zadovoljavajuća eksplicitna definicija pojma živo biće, ali se ipak može razumjeti o čemu je riječ jer se životom sâmim upoznaje i značenje toga pojma.)

Naivna teorija skupova. Klasična ili naivna teorija skupova još ne apstrahira od prirode skupova i elemenata koji ih čine, kao što su to, npr. u elementarnoj geometriji, bili Euklidovi *Elementi*, gdje se još pokušavalo »*definirati*« što su to točke i pravci, pa polazeći od »*intuitivno očito istinitih*« aksioma, kao polaznih tvrdnji, dalje razvijati geometriju. Za razliku od toga, u tzv. *aksiomatičkoj teoriji skupova* apstrahira se od prirode skupova, od toga što oni jesu, i proučavaju se samo njihovi međusobni odnosi, polazeći od aksioma koji se prihvaćaju po definiciji, iako im je motivacija da bi što je moguće točnije i punije odražavali odgovarajuće intuitivne okolnosti. Takva izgradnja teorije skupova odgovara u geometriji Hilbertovim (1862–1943) *Osnovama geometrije*, gdje se odustaje od definicije točke i pravca te se oni uzimaju kao »*sustavi predmeta*« o kojima se postavljaju aksiomi odnosa što među njima vrijede. Konačno, u formaliziranim aksiomatizacijama teorije skupova odustaje se i od sadržajne logike izvođenja posljedica (teoremâ) iz polaznih aksioma te se i ta logika formalizira aksiomatizacijom dopuštenih postupaka dedukcije. Ni naivna, ni aksiomatička, ni formalizirana teorija skupova nisu *kategoričke teorije*, tj. ni jedna od njih nije jedinstvena do *izomorfizma*. Postoje, naime, bitno različite teorije skupova pa bi, strogo uzevši, trebalo govoriti o teorijama, a ne o teoriji skupova. Primjerice, čak će i naivna teorija skupova ovisiti o tome prihvaća li se ili se ne prihvaća postojanje tzv. *inakcesibilnih brojeva*. U ovom prikazu neće biti pobliže riječi o aksiomatičkim i o formaliziranim teorijama skupova.

Prema novijim shvaćanjima, glavnina se suvremene matematike načelno može zasnovati na teoriji skupova (npr. *Bourbakijev program*).

Cantor je teoriju skupova zasnovao radovima iz vremena posljednje trećine XIX. stoljeća. Pogotovo u povodu nekih rezultata Cantorove teorije u vezi s (aktualno) beskonačnim skupovima, njegova teorija prvotno nipošto nije bila općenito prihvaćena; među oponentima posebno se isticao L. Kronecker (1823–1891). Kritike su se posebno zaoštrile u vezi s efektivnim *antinomijama*, protuslovljima koja su se, činilo se prirodno i neizbježno, javljala u kantorovskoj izgradnji naivne teorije skupova. Suprotnosti između Cantorova i Kroneckerova gledanja ostale su i kasnije kao nepomirljive razlike između tzv. *egzistencionalističkog* i tzv. *konstruktivističkog* shvaćanja matematike, odnosno legitimnosti njezinih predmeta i zaključivanja o njima. U daljoj izgradnji teorije skupova bitne su priloge dali F. Hausdorff (1868–1943), K. Gödel (1906–1978), P. Cohen i mnogi drugi.

Kantorovo *ujedinjavanje u cjelinu određenih predmeta opažanja ili mišljenja* zapravo je jedan od osnovnih načina funkcioniranja stvaranja pojmova. Kaže se, npr., *roj* pčelâ, *jato* golubova, *stado* ovaca itd. *Roj*, *jato*, *stado* ... skupovi su koji se, kao takvi, bitno razlikuju od predmetâ koji ih čine: *roj* pčelâ *nije* pčela, *jato* golubova *nije* golub, *stado* ovaca *nije* ovca itd. *Osnovna relacija* u teoriji skupova upravo i jest odnos *biti element od.* U nekim izgradnjama teorije skupova pristupa se programu uklanjanja protuslovlja tako da se razlikuje pojam *skupa* (kao uži) od pojma *klase*, pri čemu samo skupovi mogu biti elementi drugih skupova ili klasâ, dok klasa ne smije biti *lijevi član* u relaciji *element je od.*