Tada su nepoznanice σ_x^A, σ_y^A, σ_x^B, σ_y^B. Za njihovo određivanje na raspolaganju su tri jednadžbe i jedan rubni uvjet. Naime, na rubu je poznato ili σ_x^A ili σ_x^B. Uvjet tečenja u točkama A i B glasi:

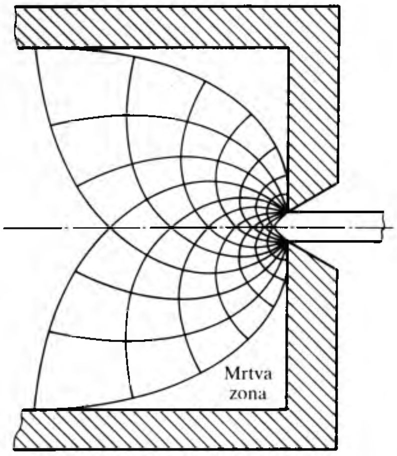
$$|\sigma_x^A - \sigma_y^A| = 2k \quad \text{i} \quad |\sigma_x^B - \sigma_y^B| = 2k. \tag{117}$$

Također je

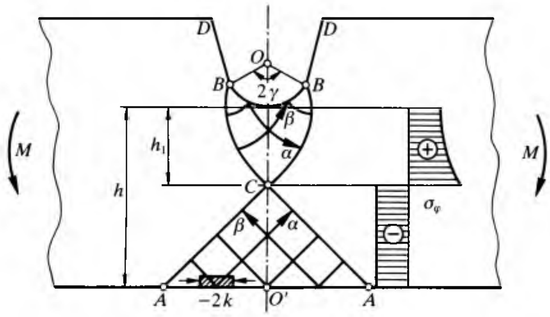
$$\sigma_0^A = \frac{1}{2}(\sigma_x^A + \sigma_y^A), \qquad \sigma_0^B = \frac{1}{2}(\sigma_x^B + \sigma_y^B), \tag{118}$$

pa je prema (116)

$$\sigma_0^A - \sigma_0^B = \pm\, 2k(\omega_A - \omega_B). \tag{119}$$



Sl. 35. Polje linija klizanja pri ekstruziji za omjer redukcije 12,5



Sl. 36. Polje linija klizanja u ploči s utorom koja je opterećena na savijanje. Gornji se dio polja sastoji od logaritamskih spirala, a donji je dio homogeno polje linija klizanja

Na sl. 33 prikazan je kruti žig koji se utiskuje u plastičnu poluravninu. U točki A poluravnine očito je $\sigma_y^A = 0$ i $\omega_A - \omega_B = -\pi/2$, pa je u točki B poluravnine $-\sigma_y^B = p = (2+\pi)k$, odnosno

$$F_{gr} = (2+\pi)kb, \tag{120}$$

gdje je $k = \sigma_T/2$ za Trescin, a $\sigma_T/\sqrt{3}$ za von Misesov kriterij. Slike 34, 35 i 36 prikazuju polja linija klizanja za neke primjere primjene metode linija klizanja.

LIT.: *Л. М. Качанов,* Основы теории пластичности. Наука, Москва 1969. – *В. В. Соколовский,* Теория пластичности. Высшая школа, Москва 1969. – *Н. Н. Малинин,* Прикладная теория пластичности и ползучести. Машиностроение, Москва 1975. – *В. Д. Клюшников,* Математическая теория пластичности. Издательство Московского университета, Москва 1979. – *H. Lippmann,* Mechanik des plastischen Fliessens. Grundlagen und technische Anwendungen. Springer-Verlag, Heidelberg 1981. – *H. Göldner,* Lehrbuch Höhere Festigkeitslehre. Physik-Verlag, Weinheim 1985. – *R. Hill,* The Mathematical Theory of Plasticity. Oxford University Press, New York 1985. – *D. R. J. Owen, E. Hinton,* Finite Elements in Plasticity, Theory and Practice. Pineridge Press, Swansea U. K. 1986. – *A. Borkowski,* Analysis of Skeletal Structural Systems in Elastic and Elastic-Plastic Range. PWN Warszawa and Elsevier, Amsterdam 1988.

I. Alfirević

TEORIJA SKUPOVA, grana matematike koja proučava odnose među općim kolektivima, posebno među beskonačnima. Prema njezinu osnivaču G. Cantoru (1845–1918) skup je ujedinjenje u cjelinu određenih, međusobno različitih predmeta našeg opažanja ili mišljenja. To se, međutim, ne može smatrati nekom klasičnom, eksplicitnom definicijom skupa i teorije skupova, niti je nešto takvo uopće moguće, jer je pojam skupa toliko osnovan i općenit da se ne može svesti na nešto još osnovnije i općenitije.

Točnije razumijevanje o čemu je riječ moguće je tek postepeno, prateći sâm razvoj i izgradnju teorije skupova. (Tako je, npr., nemoguća zadovoljavajuća eksplicitna definicija pojma živo biće, ali se ipak može razumjeti o čemu je riječ jer se životom sâmim upoznaje i značenje toga pojma.)

Naivna teorija skupova. Klasična ili naivna teorija skupova još ne apstrahira od prirode skupova i elemenata koji ih čine, kao što su to, npr. u elementarnoj geometriji, bili Euklidovi *Elementi*, gdje se još pokušavalo »*definirati*« što su to točke i pravci, pa polazeći od »*intuitivno očito istinitih*« aksioma, kao polaznih tvrdnji, dalje razvijati geometriju. Za razliku od toga, u tzv. *aksiomatičkoj teoriji skupova* apstrahira se od prirode skupova, od toga što oni jesu, i proučavaju se samo njihovi međusobni odnosi, polazeći od aksioma koji se prihvaćaju po definiciji, iako im je motivacija da bi što je moguće točnije i punije odražavali odgovarajuće intuitivne okolnosti. Takva izgradnja teorije skupova odgovara u geometriji Hilbertovim (1862–1943) *Osnovama geometrije*, gdje se odustaje od definicije točke i pravca te se oni uzimaju kao »*sustavi predmeta*« o kojima se postavljaju aksiomi odnosa što među njima vrijede. Konačno, u formaliziranim aksiomatizacijama teorije skupova odustaje se i od sadržajne logike izvođenja posljedica (teoremâ) iz polaznih aksioma te se i ta logika formalizira aksiomatizacijom dopuštenih postupaka dedukcije. Ni naivna, ni aksiomatička, ni formalizirana teorija skupova nisu *kategoričke teorije*, tj. ni jedna od njih nije jedinstvena do *izomorfizma*. Postoje, naime, bitno različite teorije skupova pa bi, strogo uzevši, trebalo govoriti o teorijama, a ne o teoriji skupova. Primjerice, čak će i naivna teorija skupova ovisiti o tome prihvaća li se ili se ne prihvaća postojanje tzv. *inakcesibilnih brojeva*. U ovom prikazu neće biti pobliže riječi o aksiomatičkim i o formaliziranim teorijama skupova.

Prema novijim shvaćanjima, glavnina se suvremene matematike načelno može zasnovati na teoriji skupova (npr. *Bourbakijev program*).

Cantor je teoriju skupova zasnovao radovima iz vremena posljednje trećine XIX. stoljeća. Pogotovo u povodu nekih rezultata Cantorove teorije u vezi s (aktualno) beskonačnim skupovima, njegova teorija prvotno nipošto nije bila općenito prihvaćena; među oponentima posebno se isticao L. Kronecker (1823–1891). Kritike su se posebno zaoštrile u vezi s efektivnim *antinomijama*, protuslovljima koja su se, činilo se prirodno i neizbježno, javljala u kantorovskoj izgradnji naivne teorije skupova. Suprotnosti između Cantorova i Kroneckerova gledanja ostale su i kasnije kao nepomirljive razlike između tzv. *egzistencionalističkog* i tzv. *konstruktivističkog* shvaćanja matematike, odnosno legitimnosti njezinih predmeta i zaključivanja o njima. U daljoj izgradnji teorije skupova bitne su priloge dali F. Hausdorff (1868–1943), K. Gödel (1906–1978), P. Cohen i mnogi drugi.

Kantorovo *ujedinjavanje u cjelinu određenih predmeta opažanja ili mišljenja* zapravo je jedan od osnovnih načina funkcioniranja stvaranja pojmova. Kaže se, npr., *roj* pčelâ, *jato* golubova, *stado* ovaca itd. *Roj*, *jato*, *stado* ... skupovi su koji se, kao takvi, bitno razlikuju od predmetâ koji ih čine: *roj* pčelâ *nije* pčela, *jato* golubova *nije* golub, *stado* ovaca *nije* ovca itd. *Osnovna relacija* u teoriji skupova upravo i jest odnos *biti element od*. U nekim izgradnjama teorije skupova pristupa se programu uklanjanja protuslovlja tako da se razlikuje pojam *skupa* (kao uži) od pojma *klase*, pri čemu samo skupovi mogu biti elementi drugih skupova ili klasâ, dok klasa ne smije biti *lijevi član* u relaciji *element je od*.

U ovom će se članku prikazati izgradnja osnovâ klasične teorije skupova.

Relacija pripadnosti. Ako je s element skupa S, kaže se da s *pripada* ili da je *sadržan* u S, odnosno da S *sadrži* s i piše se: $s \in S$. Ako t *nije* element od S, kaže se da t *ne pripada* ili da *nije sadržan* u S, odnosno da S *ne sadrži* t i piše se: $t \notin S$. Ako S sadrži elemente $a, b, c, \ldots$, piše se: $S = \{a,b,c,\ldots\}$. Npr. $\{1,2,3,4,5\}$ skup je koji sadrži sve prirodne brojeve koji nisu veći od 5 ili $\{a,b,c,d\}$ skup je koji kao elemente sadrži simbole a, b, c, d ili objekte koje ti simboli označuju.

Skup S koji sadrži one i samo one elemente koji imaju neko određeno svojstvo $P(s)$ označava se sa $S = \{s \mid P(s)\}$. Po toj je definiciji trivijalno $S = \{s \mid s \in S\}$. Ako je npr. Z skup svih *nenegativnih* cijelih brojeva, bit će $\{0,1\} = \{x \mid x \in Z \text{ i } x^2 = x\}$. Ako je R skup svih realnih brojeva, bit će $\{\sqrt{2}, -\sqrt{2}\} = \{x \mid x \in R \text{ i } x^2 = 2\}$.

Jednakost skupova. Dva se skupa S_1 i S_2 po definiciji smatraju *jednakima* onda i samo onda ako sadrže *iste* elemente, tj. ako je proizvoljni predmet x element od S_1, onda i samo onda ako je on element od S_2. Npr. $\{2,3\} = \{x \mid x$ je prirodni broj i vrijedi $x^2 - 5x + 6 = 0\}$; $\{3,5,7\} = \{x \mid x$ je neparni primbroj manji od $10\}$.

Redovno se uzima da skup ne može sadržavati neki element *u više primjeraka*, pa se u suprotnom slučaju govori o *familiji* umjesto o skupu. Druga je mogućnost da se neki element kad se u nabrajanju članova skupa S javlja *više* puta samo *jednom* računa kao njegov član. U tom je smislu npr. $\{2,3,4,4,3\} = \{2,3,4\} = \{2,2,2,3,4\}$, pa je riječ o *tročlanom* skupu. Općenito, ako se razmatra neki kolektiv kojemu su elementi i sâmi skupovi, pogotovo ako među njima možda ima i jednakih, bit će redovno zgodnije govoriti o *familiji* ili *porodici skupova* nego o *skupu skupova*.

Prazni skup. *Prema dogovoru* uvodi se i *prazni skup* koji se označava sa $\emptyset$; *po definiciji* to je skup koji *ne sadrži nijedan* element. Drugim riječima, kakav god bio predmet x, on *nije* element praznog skupa $\emptyset$. Ili, može se pisati $\emptyset = \{x \mid x \neq x\}$. Znači da se po definiciji *prihvaća postojanje* praznog skupa, za koji *ne postoji nijedan* njegov element, pa je, posebno, i $\emptyset \notin \emptyset$, a potpuni je nesmisao reći da je *prazan skup onaj koji ne postoji.* Prema prijašnjoj definiciji jednakosti skupova postoji samo *jedan jedini* prazni skup, pa je također potpun nesmisao nabrajanje *nekoliko praznih skupova*; međutim, dakako, *prazni* se skup (ne *prazan*, jer je to jedan jedini, određeni skup!) može opisati na razne načine, npr. $\emptyset = \{x \mid x$ je parni primbroj veći od $3\}$ ili $\emptyset = \{x \mid x$ je realni broj za koji je $x^2 + 1 = 0\}$ itd.

Konačni i beskonačni skupovi. Skup se zove *konačan* ako je prazan ili sadrži konačno mnogo elemenata. Skup koji *nije konačan*, koji dakle sadrži beskonačno mnogo elemenata, zove se *beskonačan.*

Podskupovi. Ako je svaki element skupa S ujedno i element skupa T, kaže se da je S *podskup* od T (i da je T *nadskup* od S) te se piše $S \subset T$ (i $T \supset S$), bez obzira je li čak $S = T$ ili nije. Posebno je prazni skup podskup svakoga skupa, pa i sâmoga sebe, pa je $\emptyset \subset S$, $\emptyset \subset \emptyset$. Također je svaki skup S podskup sâmoga sebe, $S \subset S$. Ako se želi istaknuti da je $S \subset T$, ali da nije $S = T$, kaže se da je S *pravi podskup* od T. Ako S *nije podskup* od T, tj. ako postoji barem jedan predmet koji *je* element od S, a *nije* element od T, piše se $S \not\subset T$. (U dijelu literature upotrebljava se znak $\subseteq$ umjesto $\subset$; tada je $\subset$ znak za pravi podskup.)

Lako se uviđa da je $S = T$ onda i samo onda ako je $S \subset T$ i $T \subset S$. Također iz definicije neposredno izlazi da je relacija *»biti podskup od« tranzitivna*, tj. da iz $S \subset T$ i $T \subset V$ proizlazi $S \subset V$. Umjesto $S \subset T$ i $T \subset V$ može se kraće pisati $S \subset T \subset V$.

Preslikavanja. Ako je pomoću neke funkcije f svakom elementu s nekog skupa S pridružen jednoznačno određen element $f(s) = t$ (kraće: $fs = t$) skupa T, kaže se da je f preslikavanje skupa S u skup T i piše se $f: S \rightarrow T$. Kadšto se umjesto fs piše sf. Za određeni s, $s \in S$, zove se fs, $fs \in T$, *slikom* od s pri preslikavanju f, a s *originalom* od fs pri tom istom preslikavanju.

U općenitom slučaju ne mora svaki element od T biti slika nekog elementa od S pri preslikavanju $f: S \rightarrow T$. Također ne mora svaki element fs od T koji je slika nekog elementa s od S pri preslikavanju $f: S \rightarrow T$ biti slika *samo* tog elementa od S. Ako preslikavanje $f: S \rightarrow T$ ima svojstvo da je pri tom preslikavanju svaki element od T slika *nekoga* (bar jednoga) elementa od S, kaže se da je f *preslikavanje na* ili *surjekcija.* Ako preslikavanje $f: S \rightarrow T$ ima svojstvo da pri tom preslikavanju $fs_1 = fs_2$ povlači $s_1 = s_2$, drugim riječima *ako* nijedan element od T nije *slika* (bar) *dvaju* različitih elemenata od S, kaže se da je f *uzajamno jednoznačno preslikavanje* ili *injekcija.* Preslikavanje koje je i preslikavanje *na* i *uzajamno jednoznačno* (tj. i surjekcija i injekcija) zove se *bijekcija.* Injekcija se kraće zove i 1–1 preslikavanje.

Ako je $f: S \rightarrow T$ preslikavanje skupa S u skup T, mogu skupovi S, T biti *bez* zajedničkih elemenata, a mogu *imati* i zajedničke elemente; posebno, oni se mogu i poklapati, tj. može biti i $S = T$. Ako u tom posljednjem slučaju za element s_0 od S vrijedi $fs_0 = s_0$, kaže se da je s_0 *fiksna točka* preslikavanja f. Ako je $f: S \rightarrow T$ i $S = T$ *konačan* skup, onda se, kad je f bijekcija, takvo preslikavanje zove i *permutacija.*

Općenito se dva preslikavanja $f_1 : S_1 \rightarrow T_1$ i $f_2 : S_2 \rightarrow T_2$ smatraju *jednakima* onda i samo onda ako je $S_1 = S_2$ i $T_1 = T_2$ te za svaki s iz S_1 vrijedi $f_1 s = f_2 s$.

Ako je $f: S \rightarrow T$ i $g: T \rightarrow V$, onda je po definiciji $gf: S \rightarrow V$ preslikavanje definirano sa $gf(s) = g(f(s))$ za svako $s \in S$. Preslikavanje gf rezultat je dakle uzastopnog *najprije* preslikavanja f, a *zatim* preslikavanja g. To i jest glavni razlog da se kadšto umjesto fs piše sf, jer tada za složeno preslikavanje koje se dobiva ako se najprije izvrši preslikavanje f a zatim preslikavanje g, prirodno proizlazi oznaka fg, što je zgodnije za čitanje slijeva nadesno. Za takvo slaganje (kompoziciju) preslikavanja vrijedi *asocijativnost*, tj. ako je $f: S \rightarrow T$, $g: T \rightarrow U$ i $h: U \rightarrow V$, bit će $h(gf) = (hg)f$.

Ako je $f: S \rightarrow T$ *bijekcija*, onda postoji preslikavanju f *inverzno preslikavanje* $f^{-1}: T \rightarrow S$ definirano tako da je za svako $t \in T$, $f^{-1}t$ jednako onom elementu s od S za koji je $fs = t$. Ako je npr. $S = N$ skup prirodnih brojeva, a $T = P$ skup parnih prirodnih brojeva, te $f: N \rightarrow P$ zadano sa $fn = 2n$ za svako $n \in N$, bit će $f^{-1}p = p/2$ za svako $p \in P$. Ako je $S = T = R$ skup realnih brojeva, a $f: R \rightarrow R$ zadano sa $fx = x^3$, bit će $f^{-1}x = \sqrt[3]{x}$. Ako preslikavanje f ima inverzno preslikavanje f^{-1}, onda i f^{-1} ima inverzno preslikavanje $(f^{-1})^{-1}$ pa je $(f^{-1})^{-1} = f$. Prema tome može se govoriti o *međusobno inverznim preslikavanjima.* Ako su $f: S \rightarrow T$ i $g: T \rightarrow S$ međusobno inverzna preslikavanja, tj. ako je $f^{-1} = g$ i $g^{-1} = f$, bit će gf *identično preslikavanje* od S na S (tj. $gf(s) = s$ za svako $s \in S$), a fg će biti identično preslikavanje od T na T (tj. $fg(t) = t$ za svako $t \in T$). Ako je $f: S \rightarrow S$ bijekcija i ako je $f^{-1} = f$, kaže se da je preslikavanje f *involutivno.* Npr. ako je R^+ skup pozitivnih realnih brojeva i $f: R^+ \rightarrow R^+$ zadano sa $fx = 1/x$ za svako $x \in R^+$, preslikavanje f je involutivno.

Neka je $f: S \rightarrow T$ i neka je Z podskup od S. Preslikavanje $g: Z \rightarrow T$, definirano tako da je za svako $z \in Z$, $gz = fz$, zove se *restrikcija* od f na Z i označuje se sa f_Z. Ako je $S \supset T$ i $T \supset U$ te ako je $f: S \rightarrow W$, onda je $(f_T)_U = f_U$.

Unija. Ako su S i T zadani skupovi, onda je po definiciji $S \cup T$ (čita se: S unija T) skup koji kao elemente sadrži one i samo one predmete koji su elementi *barem* jednoga od skupova S ili T. Npr. ako je $S = \{3,5,2,9\}$ i $T = \{4,9,3,0\}$, bit će $S \cup T = \{0,2,3,4,5,9\}$.

Općenitije, ako je $\{S_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ kakva god (konačna ili beskonačna) familija skupova, tj. ako je svakom λ iz *skupa indeksa* Λ pridružen neki skup S_λ (pri čemu se *ne* traži da ti skupovi moraju biti različiti za različite λ), onda se pod

$$\bigcup_{\lambda \in \Lambda} S_\lambda \tag{1}$$

(čita se: unija od S_λ po svim $\lambda \in \Lambda$) razumijeva skup koji kao elemente sadrži one i samo one predmete koji su elementi barem jednog između skupova S_λ. Očito se ta definicija za dvoelementni skup indeksa Λ svodi na prvotnu definiciju unije dvaju skupova.

Neposredno iz definicije unije proizlazi da ta operacija ima ova svojstva:

$S \cup S = S$ (*idempotentnost unije*) (2)

$S \cup T = T \cup S$ (*komutativnost unije*) (3)

$(S \cup T) \cup V = S \cup (T \cup V)$ (*asocijativnost unije*) (4)

$S \cup \emptyset = S$ (prazni skup je *neutralni element unije*) (5)

$S \cup T = T$ onda i samo onda ako je $S \subset T$. (6)

Općenita definicija unije familije skupova S_λ može se proširiti tako da se dopusti da skup indeksa Λ može biti i prazan, da se dakle definira *unija od nula* (*nijednog*) *skupova*, pa je

$$\bigcup_{\lambda \in \emptyset} S_\lambda = \emptyset. \tag{7}$$

Presjek. Ako su S i T zadani skupovi, onda je po definiciji $S \cap T$ (čita se: S presjek T) skup koji kao elemente sadrži one i samo one predmete koji su elementi obaju skupova S i T. Npr. ako je $S = \{4,3,7,2,5\}$ i $T = \{6,7,8,3\}$, onda je $S \cap T = \{3,7\}$.

Općenitije, ako je $\{S_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ kakva god (konačna ili beskonačna) familija skupova, tj. ako je svakom λ iz skupa indeksa Λ pridružen neki skup S_λ (*ne* traži se da ti skupovi moraju biti različiti za različite λ), onda se pod

$$\bigcap_{\lambda \in \Lambda} S_\lambda \tag{8}$$

razumijeva skup koji kao elemente sadrži one i samo one predmete koji su elementi svih skupova S_λ. Očito se i ta definicija za dvoelementni skup indeksa Λ svodi na prvotnu definiciju presjeka dvaju skupova.

Neposredno iz definicije presjeka proizlazi da ta operacija ima ova svojstva:

$S \cap S = S$ (*idempotentnost presjeka*) (9)

$S \cap T = T \cap S$ (*komutativnost presjeka*) (10)

$(S \cap T) \cap V = S \cap (T \cap V)$ (*asocijativnost presjeka*) (11)

$S \cap \emptyset = \emptyset$ (prazni skup je *nul-element operacije presjeka*) (12)

$S \cap T = T$ onda i samo onda ako je $T \subset S$. (13)

Zbog svojstva asocijativnosti unije i presjeka može se npr. umjesto $(S \cup T) \cup V$ i umjesto $S \cup (T \cup V)$ pisati samo $S \cup T \cup V$, te analogno i za presjek.

Općenita definicija presjeka ne može se, kao što je to bio slučaj kod unije, proširiti i na slučaj kad je skup indeksa Λ prazni skup $\emptyset$. Tada bi naime trebalo staviti da je presjek od nula skupova skup koji kao elemente sadrži sve predmete uopće, tj. to bi trebao biti neki *univerzalni skup* koji bi, osim ostalog, među svojim elementima morao sadržavati npr. i sâmoga sebe. No u klasičnoj je teoriji skupova takav univerzalni skup u sebi kontradiktoran i stoga nedopustiv.

Između operacije unije i presjeka vrijede i ove veze:

$S \cup (T \cap V) = (S \cup T) \cap (S \cup V)$ (*distributivnost unije prema presjeku*) (14)

$S \cap (T \cup V) = (S \cap T) \cup (S \cap V)$ (*distributivnost presjeka prema uniji*) (15)

$(S \cap T) \cup T = T$ (*apsorptivnost unije prema presjeku*) (16)

$(S \cup T) \cap T = T$ (*apsorptivnost presjeka prema uniji*) (17)

Ako je $S \cap T = \emptyset$, kaže se da su S, T *disjunktni skupovi* (skupovi bez zajedničkih elemenata). Prazni skup je disjunktan s proizvoljnim skupom S pa i sa sâmim sobom. Analogno se za skup skupova $\{S_\lambda\}$ kaže da je to *skup disjunktnih skupova* ako je svaki par različitih skupova iz toga skupa disjunktan. Ako je $\{S_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ skup disjunktnih skupova za koji je $\cup\, S_\lambda = T$, kaže se da je skupom $\{S_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ zadana *particija* skupa T (na skup disjunktnih skupova $\{S_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$).

Razlika. Ako su S i T zadani skupovi, onda je po definiciji $S \setminus T$ (čita se: S *minus* T) skup koji kao elemente sadrži one i samo one predmete koji *jesu* elementi od S, ali *nisu* elementi od T. Ako je pri tome još $T \subset S$, zove se $S \setminus T$ također i *komplement* od T (s obzirom na S) i označuje sa $C_S T$. Npr. ako je $S = \{4,2,7,5,0\}$ i $T = \{0,6,9,2\}$, bit će $S \setminus T = \{4,7,5\}$ te ako je uz isti S skup $T = \{4,7\}$, bit će $S \setminus T = C_S T = \{2,5,0\}$.

Vrijede ove jednakosti:

$$(S \setminus T) \cup (S \cap T) = S \tag{18}$$

$$(S \cup T) \setminus T = S \setminus T \tag{19}$$

$$(S \setminus T) \cup (S \cap T) \cup (T \setminus S) = S \cup T \tag{20}$$

$$(S \setminus T) \setminus V = S \setminus (T \cup V) \tag{21}$$

$$S \setminus (T \setminus V) = (S \setminus T) \cup (S \cap V) \tag{22}$$

$$C_S \emptyset = S \setminus \emptyset = S \tag{23}$$

$$C_S S = S \setminus S = \emptyset. \tag{24}$$

Ako je, posebno, $T \subset S$ i $V \subset S$, vrijedi također:

$$C_S(C_S T) = S \setminus (S \setminus T) = T \tag{25}$$

$$C_S T \cup T = (S \setminus T) \cup T = S \tag{26}$$

$$C_S T \cap T = (S \setminus T) \cap T = \emptyset \tag{27}$$

$$\left.\begin{array}{l} C_S(T \cup V) = C_S T \cap C_S V \quad (27a) \\ C_S(T \cap V) = C_S T \cup C_S V \quad (27b) \end{array}\right\} \text{(de Morganovi stavci).}$$

Simetrična diferencija. Ako su S i T zadani skupovi, onda je po definiciji *simetrična diferencija* od S i T (oznaka: $S \Delta T$) skup $(S \setminus T) \cup (T \setminus S)$. Vrijede relacije:

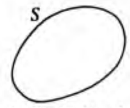
$S \Delta T = T \Delta S$ (*komutativnost simetrične diferencije*) (28)

$(S \Delta T) \Delta V = S \Delta (T \Delta V)$ (*asocijativnost simetrične diferencije*) (29)

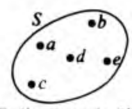
$$S \Delta S = \emptyset \tag{30}$$

$$S \Delta \emptyset = S. \tag{31}$$

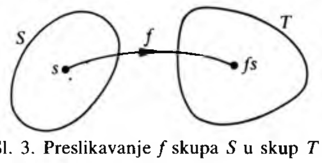
Skupovi, preslikavanje skupova te operacije unije, presjeka, razlike i simetrične diferencije skupova mogu se u elementarnoj naivnoj teoriji skupova ilustrirati tzv. *Vennovim dijagramima*. Proizvoljni se skup »obuhvati« zatvorenom, redovno ovalnom linijom, a elementi mu se ili »ucrtaju« unutar područja obuhvaćena tom linijom ili se smatra da su to »točke« unutar toga područja (sl. 1 i 2). Preslikavanje f skupa S u skup T može se ilustrirati prema sl. 3. Sl. 4 ilustrira (crtkanim područjem) uniju, sl. 5 presjek, sl. 6 razliku i sl. 7 simetričnu diferenciju dvaju skupova S i T.



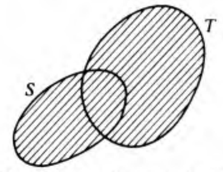
Sl. 1. Područje skupa



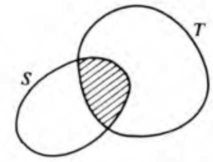
Sl. 2. Točke u području skupa



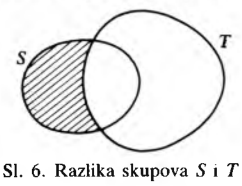
Sl. 3. Preslikavanje f skupa S u skup T



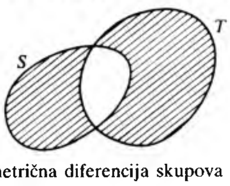
Sl. 4. Unija skupova S i T



Sl. 5. Presjek skupova S i T



Sl. 6. Razlika skupova S i T



Sl. 7. Simetrična diferencija skupova S i T

Kartezijev produkt. Ako su S i T dani skupovi, onda se skup svih *uređenih parova* $\langle s,t\rangle$ takvih da je $s \in S$ i $t \in T$ zove *Kartezijev produkt* skupova S i T i označuje se sa $S \times T$. Npr. ako je $S = \{1,2,3\}$ i $T = \{a,b\}$, bit će $S \times T = \{\langle 1,a\rangle, \langle 1,b\rangle, \langle 2,a\rangle, \langle 2,b\rangle, \langle 3,a\rangle, \langle 3,b\rangle\}$. Ako je, posebno, barem jedan od skupova S i T prazni skup, bit će i njihov Kartezijev produkt $S \times T$ prazni skup. Inače, sâm uređeni par elemenata iz S i T, kad ti skupovi nisu disjunktni, ne mora biti skup, jer elementi istog uređenog para mogu biti međusobno jednaki.

Analogno se definira Kartezijev produkt od *konačno mnogo* (*ne* nužno disjunktnih ili uopće različitih) skupova; posebno je npr. $S \times T \times V$ skup svih uređenih trojki elemenata $\langle s,t,v\rangle$ za koje je $s \in S$, $t \in T$ i $v \in V$.

Pojam Kartezijeva produkta proširuje se i na slučaj kad zadanih skupova može biti i *beskonačno* mnogo. Neka je $\{S_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ dana (konačna ili beskonačna) familija skupova, tj. neka je svakom λ iz skupa indeksa Λ pridružen neki skup S_λ (ti skupovi ne moraju biti različiti ili bez zajedničkih elemenata za različite λ) i neka je f neko preslikavanje $f: \Lambda \to \bigcup_{\lambda \in \Lambda} S_\lambda$ takvo da za svaki $\lambda \in \Lambda$ vrijedi $f\lambda \in S_\lambda$. Tada se skup svih tih funkcija f zove *Kartezijevim produktom* familije skupova $\{S_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ i označuje sa $\prod_{\lambda \in \Lambda} S_\lambda$. Posebno se za $\Lambda = \{1, 2, \ldots, n\}$ skup $\prod_{\lambda \in \Lambda} S_\lambda$ svodi na $S_1 \times S_2 \times \cdots \times S_n$ u prijašnjem smislu time što svakom f odgovara uređena n-torka $\langle f1, f2, \ldots, fn\rangle$. I za tu proširenu definiciju Kartezijeva produkta vrijedi da čim je *makar jedan* od faktora Kartezijeva produkta prazni skup, i sâm je Kartezijev produkt prazni skup. Nadalje, vrijede jednakosti:

$$(S_1 \times T) \cup (S_2 \times T) = (S_1 \cup S_2) \times T, \tag{32}$$

$$(S_1 \times T_1) \cap (S_2 \times T_2) = (S_1 \cap S_2) \times (T_1 \cap T_2). \tag{33}$$

Partitivni skup. Ako je S neki skup, onda se skup svih podskupova od S zove *partitivni skup* od S i označuje se sa $\mathcal{P}S$. Posebno je partitivni skup praznog skupa jednoelementni skup $\{\emptyset\}$, $\mathcal{P}\emptyset = \{\emptyset\}$. Partitivni je skup jednoelementnog skupa $S = \{a\}$ dvoelementni skup $\mathcal{P}\{a\} = \{\emptyset, \{a\}\}$. Partitivni je skup dvoelementnog skupa $S = \{a,b\}$ četveroelementni skup $\mathcal{P}\{a,b\} = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a,b\}\}$. Općenito, partitivni skup $\mathcal{P}S$ konačnog skupa S od n elemenata sadrži 2^n elemenata.

Ako je $f: S \to T$ preslikavanje skupa S u skup T, onda se *proširenjem* od f na preslikavanje skupa $\mathcal{P}S$ u skup $\mathcal{P}T$ zove *ono* preslikavanje f koje je za svaki $Z \subset S$ (tj. za svaki $Z \in \mathcal{P}S$) definirano sa $fZ = \bigcup_{z \in Z} \{fz\}$. Posebno je npr. uvijek $f\emptyset = \emptyset, f\{z\} = \{fz\}$. Uz tako uvedeni naziv proširenja može se npr. reći da je preslikavanje $f: S \to T$ surjekcija onda i samo onda ako za njegovo proširenje vrijedi $fS = T$.

Ako je $f: \mathcal{P}S \to \mathcal{P}T$ proširenje od $f: S \to T$, zove se preslikavanje $f^{-1}: \mathcal{P}T \to \mathcal{P}S$ definirano za svaki $V \subset T$ (tj. za svaki $V \in \mathcal{P}T$) sa $f^{-1}V = \{z \in S | fz \in V\}$ *recipročnim proširenjem* od $f: S \to T$. Posebno, dakle, za recipročno proširenje f^{-1} od $f: S \to T$ uvijek vrijedi $f^{-1}\emptyset = \emptyset, f^{-1}T = S$. Ako je preslikavanje $f: S \to T$ bijekcija, tada će restrikciji f_r^{-1} recipročnog proširenja od f na skup svih jednoelementnih podskupova od T na prirodni način odgovarati inverzno preslikavanje f^{-1} od $f: S \to T$ tako da će biti $f_r^{-1}\{t\} = \{s\}$ onda i samo onda ako je $f^{-1}t = s$.

Za proširenje i recipročno proširenje preslikavanja $f: S \to T$ vrijedi:

Za proizvoljne $A, B \subset S$ je $f(A \cup B) = (fA) \cup (fB)$. (34)

Za proizvoljne $A, B \subset S$ je $f(A \cap B) = (fA) \cap (fB)$. (35)

Za svako $A \subset T$ je $f(f^{-1}A) \subset A$. (36)

Za svako $A \subset S$ je $f^{-1}(fA) \supset A$. (37)

Za proizvoljne $A, B \subset T$ je $f^{-1}(A \cup B) = (f^{-1}A) \cup (f^{-1}B)$. (38)

Za proizvoljne $A, B \subset T$ je $f^{-1}(A \cap B) = (f^{-1}A) \cap (f^{-1}B)$. (39)

Aksiom izbora (*Zermelov aksiom*) glasi: za proizvoljni skup S postoji preslikavanje $\gamma: \mathcal{P}S \setminus \{\emptyset\} \to S$ takvo da za svaki element Z od $\mathcal{P}S \setminus \{\emptyset\}$ vrijedi $\gamma Z \in Z$. Drugim riječima, postoji *skup reprezentanata* skupa svih nepraznih podskupova od S, tako da je reprezentant svakog takvog podskupa neki njegov element.

Zermelov je aksiom jedna od najpoznatijih i najtipičnijih matematičkih »kontroverzija«; otkako je prvi put bio eksplicitno formuliran, uvijek je bilo matematičara (i to prvoga reda!) koji su kategorički odbijali da prihvate tvrdnju tog aksioma. Glavni je razlog tomu svakako njegova *nekonstruktivnost*. Aksiom postulira postojanje jednog skupa (spomenutog skupa reprezentanata), a da, sâm po sebi, ne daje nikakve mogućnosti da se on definira, a pogotovo da se efektivno, makar samo u načelu, konstruira. U pojedinim se slučajevima čak može »dokazati« (u navodnicima, jer ni tu argumenti nisu indiskutabilni) da takav skup reprezentanata čak nikako nije ni moguće definirati; npr. za slučaj da je S skup realnih brojeva. Problematika u vezi sa Zermelovim aksiomom vrlo je osjetljiva, pa se i istaknutim matematičarima događalo da su tu griješili. Više se puta npr. pogrešno ustvrdilo da je Zermelov aksiom istovrijedan s tvrdnjom da se u svakom (proizvoljnom) skupu (koji nije prazan) može istaknuti jedan njegov element. Ta tvrdnja ne vrijedi; Zermelov je aksiom *bitno jači*, on zahtijeva *bitno više*, naime da i svaka *beskonačna* familija nepraznih skupova ima svoj skup reprezentanata. Za *konačne* familije nepraznih skupova Zermelov se aksiom može izvesti kao *teorem*, kao posljedica *bitno slabijih* pretpostavaka nego je Zermelov aksiom. S druge strane, velika većina »radnih« matematičara i načelno i u praksi prihvaća Zermelov aksiom.

Postoji mnogo *ekvivalenata* Zermelova aksioma, tj. tvrdnja koje se, s pomoću preostalih postavki teorije skupova koje *nisu* diskutabilne, mogu i izvesti iz Zermelova aksioma, kao i obratno, imaju, uz te ostale postavke, Zermelov aksiom kao posljedicu koju sâmi impliciraju. Takve su npr. ove dvije tvrdnje: *a*) za svaku familiju nepraznih skupova postoji njezin skup reprezentanata i *b*) za svaku nepraznu familiju nepraznih skupova Kartezijev je produkt tih skupova neprazan.

Binarna relacija ϱ u skupu S bit će definirana ako je za svaki uređeni par (različitih ili jednakih) elemenata od S određeno *jesu* li ili *nisu* u relaciji ϱ. Binarnoj relaciji ϱ u skupu S na prirodan način odgovara, korespondentan joj je određeni podskup R Kartezijeva produkta $S \times S$ (Kartezijev *kvadrat* od S), tj. onaj podskup R od $S \times S$ koji kao element sadrži one i samo one uređene parove elemenata od S koji *jesu* u relaciji ϱ. Ta se korespondencija često (iako, strogo uzevši, nekorektno) formulira kao identifikacija, tj. kaže se da binarna relacija u skupu S *jest* određeni podskup od $S \times S$. Ako su elementi s_1, s_2 uređenog para $\langle s_1,s_2\rangle$ u relaciji ϱ, piše se $s_1 \varrho s_2$ ili $\varrho(s_1,s_2)$, tj. po definiciji je $s_1 \varrho s_2$ onda i samo onda ako je $\langle s_1,s_2\rangle \in R$.

Slično se uvodi *ternarna relacija* u skupu S. Ona je definirana ako je za svaku uređenu trojku elemenata od S određeno *jesu* li ili *nisu* u toj relaciji. Ternarnoj relaciji u skupu S na prirodan način odgovara određeni podskup R od $S \times S \times S$ (Kartezijev kub od S), tako da je po definiciji $\varrho(s_1,s_2,s_3)$ onda i samo onda ako je $\langle s_1,s_2,s_3\rangle \in R$.

Općenito je u skupu S definirana *n-arna relacija* (n prirodni broj) ako je za svaku uređenu n-torku $\langle s_1,s_2,\ldots,s_n\rangle$ elemenata od S određeno *jesu* li ili *nisu* u toj relaciji. n-arnoj relaciji ϱ u S na prirodan način odgovara podskup R od S^n (n-ta potencija od S) koji kao elemente sadrži one i samo one uređene n-torke elemenata od S za koje njezini članovi *jesu* u relaciji ϱ. Tu definiciju za $n = 1$ treba uzeti tako da je *unarna* relacija u skupu S definirana ako je za svaki element od S određeno da li jest ili nije u toj relaciji; svakoj takvoj unarnoj relaciji pridružen je prirodno onaj podskup od S koji sadrži one i samo one elemente od S koji *jesu* u zadanoj relaciji. To i opet nije posve strogo jer je tu *uređena jednorka* $\langle s_1\rangle$ identificirana s elementom s_1.

Binarna relacija ϱ zove se *refleksivna* ako za svaki element s od S vrijedi $s\varrho s$. Binarna relacija ϱ zove se *simetrična* ako za svaki $s_1 \in S$ i za svaki $s_2 \in S$ vrijedi da iz $s_1 \varrho s_2$ slijedi $s_2 \varrho s_1$. Binarna relacija ϱ zove se *antisimetrična* ako iz $s_1 \varrho s_2$ i $s_2 \varrho s_1$ nužno proizlazi da je $s_1 = s_2$, tj. ako uz $s_1 \neq s_2$ *ne može biti* $s_1 \varrho s_2$. Binarna relacija ϱ zove se *tranzitivna* ako za svaki $s_1 \in S$, za svaki $s_2 \in S$ i za svaki $s_3 \in S$ vrijedi da iz $s_1 \varrho s_2$ i $s_2 \varrho s_3$ slijedi da je i $s_1 \varrho s_3$.

Binarna relacija ϱ koja je refleksivna, simetrična i tranzitivna zove se *relacija ekvivalencije*: takva se relacija često označuje sa $\sim$. Relacija ekvivalencije u nepraznom skupu S određuje particiju skupa S na disjunktne neprazne podskupove S_i tako da su s_j i s_k elementi istog od tih podskupova S_i onda i samo onda ako je $s_j \sim s_k$. Obrnuto, ako je skupom nepraznih podskupovâ $\{S_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ dana particija (nepraznog) skupa S na disjunktne podskupove S_λ, ta particija u skupu S na prirodan način određuje relaciju ekvivalencije $\sim$ ako se stavi da je $\langle s_j, s_k \rangle$ po definiciji u toj relaciji (tj. $s_j \sim s_k$) onda i samo onda ako su s_j i s_k elementi istog S_λ.

Binarna relacija koja je refleksivna, antisimetrična i tranzitivna zove se *relacija parcijalnog* (ili *djelomičnog*) *uređenja*. Takva se relacija često označuje sa $\leqq$, a za skup S u kojem je takva relacija definirana kaže se da je njome *parcijalno* (ili *djelomično*) *uređen*.

Ako je $\leqq$ binarna relacija parcijalnog uređenja za koju, osim toga, vrijedi da je bilo $s_1 \leqq s_2$ bilo $s_2 \leqq s_1$ za svaki $s_1 \in S$ i za svaki $s_2 \in S$, ta se relacija $\leqq$ zove *relacija* (*potpunog* ili *totalnog*) *uređenja*. Za skup S u kojem je definirana takva relacija kaže se da je njome (*potpuno* ili *totalno* ili *linearno*) uređen.

Ako je skup S (potpuno) uređen relacijom $\leqq$ koja osim toga ima još i ovo svojstvo: *da svaki neprazni podskup od S ima najmanji element*, tj. u svakom nepraznom podskupu Z od S postoji element z_0 takav da je $z_0 \leqq z$ za sve elemente z od Z, tada se kaže da je relacija $\leqq$ relacija *dobrog uređenja* i da je skup S njome *dobro uređen*. Zbog antisimetričnosti relacije $\leqq$ najmanji element z_0 proizvoljnog podskupa Z od S određen je jednoznačno.

Binarna relacija $<$ sa svojstvima: *a*) ni za koji element s od S ne vrijedi $s < s$, *b*) za svaki $s_1 \in S$ i za svaki $s_2 \in S$ vrijedi točno jedna od triju relacija $s_1 < s_2$, $s_1 = s_2$, $s_2 < s_1$, *c*) relacija $<$ je tranzitivna te se zove *relacija striktnog* (ili *strogog*) (*linearnog* ili *potpunog*) *uređenja*.

Ako je $\leqq$ relacija potpunog uređenja, onda je relacija $<$, definirana sa $s_1 < s_2$ onda i samo onda ako je $s_1 \leqq s_2$, ali nije $s_1 = s_2$, relacija striktnog uređenja.

Obratno, ako je $<$ relacija striktnog uređenja, onda je relacija $\leqq$, definirana sa $s_1 \leqq s_2$ onda i samo onda ako je $s_1 < s_2$ ili je $s_1 = s_2$, relacija potpunog uređenja.

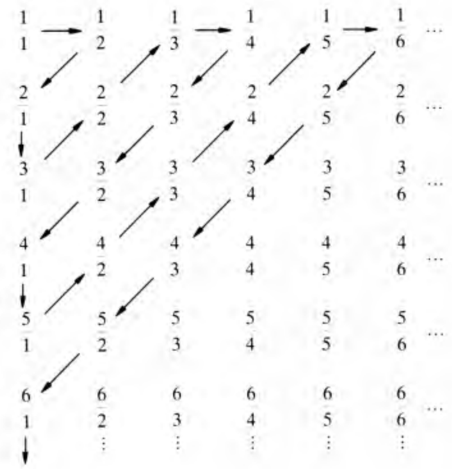
Primjeri. 1) Neka je S skup prirodnih brojeva i neka je m neki čvrsto odabrani broj. Za s_1, $s_2 \in S$ neka je $s_1 \varrho s_2$ onda i samo onda ako je $s_1 - s_2$ bez ostatka djeljivo sa m. Tada je ϱ relacija ekvivalencije. *2*) Neka je S skup prirodnih brojeva i neka je $s_1 \varrho s_2$ onda i samo onda ako je s_1 bez ostatka djeljivo sa s_2. Tada je ϱ relacija parcijalnog uređenja. *3*) Neka je S skup prirodnih brojeva i neka ϱ ima značenje *jednak je* ili *manji je od* u običnom smislu. Tada je to relacija (potpunog) uređenja. *4*) Neka je S skup prirodnih brojeva i neka ϱ ima značenje *manji je od* u običnom smislu. Tada je to relacija striktnog uređenja. *5*) Neka je S skup svih onih pozitivnih realnih brojeva r za koje je $r = n + 1 - \dfrac{1}{m}$, gdje su n i m prirodni brojevi. Za dva elementa r_1, r_2 od S neka je $r_1 \varrho r_2$ onda i samo onda ako je $r_1 \leqq r_2$. Tada je ϱ relacija dobrog uređenja.

Uz upotrebu Zermelova aksioma (ili neke njemu ekvivalentne izreke) može se dokazati da *za svaki* (proizvoljni) *neprazni* (konačni ili beskonačni) *skup S postoji dobro uređenje od S*, tj. postoji relacija dobrog uređenja toga skupa.

Vrijedi i obrat, tj. *ako za svaki skup S navedenih svojstava postoji* (bar jedno) *njegovo dobro uređenje*, *onda vrijedi Zermelov aksiom*. Dokaz je obrata trivijalan, jer se svakom podskupu Z od S koji *nije* prazan može kao njegov reprezentant pridružiti njegov *najmanji element*. Dokaz direktne tvrdnje znatno je kompliciraniji: sâm Zermelov aksiom čini se intuitivno nametljivim, dok je teorem da se svaki neprazni skup može dobro urediti to u znatno manjoj mjeri. (G. Cantor bio je *uvjeren* u ispravnost te tvrdnje, no *dokazao* ju je tek E. Zermelo.)

Kardinalni brojevi. Ako za par skupova S, T postoji bijekcija $f: S \to T$, kaže se da ti skupovi imaju istu *potenciju* ili da su istog *kardinalnog broja*. Tako definirana binarna relacija *biti istog kardinalnog broja* u klasi svih skupova relacija je ekvivalencije, pa ona određuje particiju te klase na disjunktne potklase skupova istog kardinalnog broja. Kao što se klasi svih konačnih skupova s istim brojem elemenata pridružuje odgovarajući *apstraktni prirodni broj*, tako se, općenitije, klasi svih skupova istoga kardinalnog broja pridružuje odgovarajući (apstraktni) kardinalni broj. Praznom skupu $\emptyset$ pridružuje se kardinalni broj 0, konačnim skupovima koji sadrže n elemenata pridružuje se (konačni) kardinalni broj n, a beskonačnim skupovima pridružuju se beskonačni kardinalni brojevi za koje je, općenito, prihvaćeno da se označuju hebrejskim slovom alef ($\aleph$) s indeksima koji su redni brojevi (o kojima se govori poslije). Posebno se za skupove koji su istoga kardinalnog broja kao skup N prirodnih brojeva kaže da su *prebrojivi* ili *prebrojivo beskonačni* i da im je kardinalni broj $\aleph_0$ (čita se: alef nula).

Svaki beskonačni skup koji se može urediti tako da bude sličan nizu prirodnih brojeva, tj. skup kojemu se svi njegovi elementi mogu poredati u niz $s_1, s_2, s_3, \ldots, s_n, \ldots$ prebrojiv je, a tražena je bijekcija dana sa $fn = s_n$. Tako su prebrojivi npr. skup svih *parnih* brojeva $2, 4, 6, 8, 10, \ldots$; zatim skup svih cijelih brojeva $0, -1, 1, -2, 2, -3, 3, \ldots$. Prebrojiv je i skup svih *pozitivnih racionalnih* brojeva, tj. skup svih realnih brojeva koji se mogu predočiti u obliku m/n, gdje su m i n prirodni brojevi, što se uviđa iz sheme na sl. 8. Prema toj shemi prolazi se putem naznačenim strelicama, izostavljajući pritom brojeve koji su se, samo u drugačijem zapisu, već pojavili; time se dobiva niz $1, \frac{1}{2}, 2, 3, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{2}{3}, \frac{3}{2}, 4, 5, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{2}{5}, \frac{3}{4}, \frac{4}{3}, \frac{5}{2}, 6, \ldots$ koji sadrži sve pozitivne racionalne brojeve. Prebrojiv je i skup *svih racionalnih* brojeva; tako se npr. počne sa 0 i nastavi upravo dobiveni niz u koji se iza svakoga pozitivnog racionalnog broja r umetne broj $-r$.



Sl. 8. Shema za uređenje u niz tipa ω skupa pozitivnih racionalnih brojeva prikazanih omjerom m/n, gdje su m i n prirodni brojevi

Prebrojiv je, nadalje, i skup svih algebarskih brojeva, tj. skup svih realnih brojeva koji su nultočke polinomâ $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$, s cjelobrojnim koeficijentima a_i. To se uviđa ovako: zbroj stupnja polinoma i apsolutnih vrijednosti svih njegovih koeficijenata prirodni je broj. Svi takvi polinomi mogu se dakle rastaviti u disjunktne skupove prema vrijednosti toga prirodnog broja i ti se skupovi mogu poredati u niz prema rastućoj vrijednosti toga prirodnog broja; unutar svakog od tih skupova ima konačno mnogo polinoma koji se mogu poredati npr. kao po abecedi (leksikografski). Konačno, različite nultočke istog polinoma mogu se poredati prema rastućim vrijednostima. Ako se iz tako dobivenog niza isključe algebarski brojevi koji su se već pojavili, proizlazi uređenje u niz skupa svih algebarskih brojeva.

Kakav god bio skup S, skupovi S i $\mathcal{P}S$ *ne mogu* imati istu potenciju. Dokaz te tvrdnje služi za ilustraciju takvih postupaka unutar klasične teorije skupova. Treba pokazati da nijedna injekcija $f: S \to \mathcal{P}S$ ne može biti surjekcija. Neka je $R = \{s \mid s \in S \text{ i vrijedi } s \notin fs\}$. Pokazat će se da *nema* elementa

$s_0 \in S$ sa svojstvom $fs_0 = R$. Naime, kad bi takav element postojao, bilo bi ili $s_0 \in R$ *ili* $s_0 \notin R$. U prvom bi slučaju bilo dakle $s_0 \in fs_0$, suprotno definiciji od R. U drugom bi slučaju bilo $s_0 \notin fs_0$, pa bi po definiciji od R moralo biti $s_0 \in R = fs_0$, što je opet kontradikcija. Time je tvrdnja dokazana.

Među kardinalnim brojevima uvodi se ova binarna relacija $\leqq$. Ako je kardinalni broj od S jednak k_1, a kardinalni broj od T jednak k_2, bit će po definiciji $k_1 \leqq k_2$ onda i samo onda ako postoji injekcija $f: S \rightarrow T$. Ta je definicija dobra, jer je svejedno koji se skupovi S i T odaberu kao reprezentanti skupova s kardinalnim brojevima k_1 i k_2. Tom je relacijom klasa kardinalnih brojeva ne samo parcijalno već i totalno pa čak i dobro uređena. Pritom se tvrdnja da je to parcijalno uređenje redovno dokazuje preko Cantor-Bernsteinova teorema, dok je za dokaz da je uređenje čak dobro bitan Zermelov aksiom ili neka njemu ekvivalentna tvrdnja.

Budući da za svaki skup S postoji injekcija $f: S \rightarrow \mathcal{P}S$, npr. ona za koju je $fs = \{s\}$, proizlazi da je kardinalni broj od $\mathcal{P}S$ uvijek *veći* od kardinalnog broja od S. Odatle među beskonačnim kardinalnim brojevima nema najvećega. Ako je kardinalni broj skupa S jednak k, kardinalni je broj njegova partitivnog skupa $\mathcal{P}S$ jednak 2^k. Dakle je $2^k > k$ i za beskonačne k. Posebno je kardinalni broj partitivnog skupa od skupa prirodnih brojeva jednak $2^{\aleph_0}$. Isti kardinalni broj ima i skup svih realnih brojeva, pa se $2^{\aleph_0}$ označuje i sa c (*continuum* realnih brojeva).

Hipoteza kontinuuma. Prema Cantorovoj *hipotezi kontinuuma* vrijedi $2^{\aleph_0} = \aleph_1$, tj. kardinalni je broj skupa realnih brojeva *najmanji* među kardinalnim brojevima *većim* od prebrojivo beskonačnoga. Drugim riječima, kardinalni broj skupa realnih brojeva dolazi u klasi dobro uređenih kardinalnih brojeva kao prvi iza $\aleph_0$. To znači da je po Cantorovoj hipotezi kontinuuma *svaki* beskonačni podskup skupa realnih brojeva takav da se može 1–1 preslikati *bilo* na skup svih prirodnih brojeva, *bilo* na skup svih realnih brojeva.

G. Cantor je vjerovao da je ta hipoteza ispravna. K. Gödel je kasnije dokazao da se u određenim formaliziranim aksiomatizacijama teorije skupova hipoteza kontinuuma *ne može oboriti*, ali je smatrao da bi se u nekom jačem formaliziranom sustavu (dobivenom dodavanjem nekih daljih intuitivno prihvatljivih aksioma) Cantorova hipoteza *mogla* oboriti. S druge strane, još kasnije je P. Cohen dokazao da je u određenim formalizacijama aksiomatizirane teorije skupova hipoteza kontinuuma *nedokaziva*. To znači da je u takvim sustavima ona *neodlučiva*, slično kao što je to primjerice Euklidov postulat o paralelama u tzv. apsolutnoj geometriji, tako da se ta može konzistentno proširiti bilo tim Euklidovim petim postulatom, bilo njegovom negacijom. Formalizacije aksiomatičke teorije skupova o kojima je ovdje bila riječ jesu u tzv. logici I. reda; međutim, može se pokazati da je u formalizaciji na osnovi tzv. logike II. reda hipoteza kontinuuma *odlučena* (tj. *nije* neodlučiva), ali se ne zna, niti se, barem danas, uopće može naslutiti, kako bi se možda moglo saznati je li odlučena u smislu dokazivosti ili oborivosti. Cantorova hipoteza kontinuuma u svakom je slučaju i dalje jedan od najtežih i po posljedicama jedan od najdelekosežnijih problema teorije skupova. (Paul Cohen je za svoje rezultate o tome primio Fieldsovu medalju i nagradu, koja je za matematičke znanosti ekvivalent Nobelove nagrade.) Na ovom mjestu nije moguće dublje ulaziti u tu problematiku koja ima implikacije ne samo za matematiku uopće nego i za filozofiju znanosti pa i filozofiju uopće.

Transfinitna indukcija. Za transfinitne (beskonačne) dobro uređene skupove vrijedi *princip transfinitne indukcije*.

Ako za svaki $s \in S$ iz pretpostavke da svi elementi od S koji su manji od s (tj. svi $z \in S$ za koje je $z \leqq s$ i $z \neq s$) imaju svojstvo σ proizlazi (kao posljedica) da i element s ima svojstvo σ, tada svi elementi od S imaju svojstvo σ.

Dokaz principa transfinitne indukcije: ako ta tvrdnja ne bi bila ispravna, postojao bi neki $z \in S$ koji ne bi imao svojstvo σ. Neka je Z skup svih takvih elemenata z koji nemaju svojstvo σ. Z mora imati najmanji element, jer je po pretpostavci neprazan i jer je S dobro uređen skup; neka je z_0 taj najmanji element od Z. Svi elementi od S koji su manji od z_0 (tj. svi $s \in S$ za koje je $s \leqq z_0$ i $s \neq z_0$), bez obzira ima li ili nema takvih elemenata (tj. bez obzira je li skup svih takvih elemenata koji su manji od z_0 prazan ili nije), imaju dakle svojstvo σ. No tada bi po pretpostavci transfinitne indukcije morao i z_0 imati svojstvo σ, što je kontradikcija. Znači, *nema* elementa z skupa S koji *ne bi imao* svojstvo σ.

Ordinalni brojevi. (Strogo) uređeni skup S zove se *sličan* (strogo) uređenom skupu T ako se (pomoću $f: S \rightarrow T$) S može 1—1 preslikati na T tako da se sačuva uređenje, tj. da za svaki $s_1 \in S$ i za svaki $s_2 \in S$ iz $s_1 < s_2$ proizlazi $fs_1 < fs_2$.

Za slične (strogo) uređene skupove S i T kaže se da imaju isti *redni tip*. Redni tipovi (strogo) dobro uređenih skupova zovu se *redni* ili *ordinalni brojevi*, kraće *ordinali*. Ako je (strogo) dobro uređeni skup S beskonačan, njegov je ordinal *beskonačan* (*transfinitan*).

Ordinalni broj (strogo) dobro uređenog skupa prirodnih brojeva, poredanih po vrijednosti, označava se sa ω.

Svi elementi nekog (strogo) dobro uređenog skupa S koji prethode (koji su manji) nekom njegovu čvrstom elementu s_0, s prenesenim uređenjem od S, čine *odsječak* od S koji je također (strogo) dobro uređen.

Ako dva (strogo) dobro uređena skupa nisu slična, onda je jedan od njih sličan nekom odsječku drugoga. Ako su σ i τ ordinali (strogo) dobro uređenih skupova S i T, kaže se da je $\sigma < \tau$ onda i samo onda ako je S sličan nekom odsječku od T.

Skup svih ordinala koji su manji od nekog ordinala α, u kojem su ti ordinali poredani po vrijednosti, jest (strogo) dobro uređeni skup kojem je redni tip jednak ordinalu α.

Ako se (strogo) dobro uređeni skup T sa svojim uređenjem nadoveže na (strogo) dobro uređeni skup S, označava se redni tip dobivenog (strogo) dobro uređenog skupa kao zbroj ordinala skupova S i T (tj. σ i τ), i to u redoslijedu $\sigma + \tau$.

Uz takvu notaciju može se (strogo) dobro uređeni početak niza ordinala pisati u obliku $0, 1, 2, \ldots, k, \ldots, \omega, \omega + 1, \ldots, \omega + k, \ldots, \omega \cdot 2, \omega \cdot 2 + 1, \ldots, \omega \cdot 3, \ldots, \omega \cdot k + l, \ldots, \omega^2, \ldots, \omega^2 + \omega \cdot k + l, \ldots, \omega^2 \cdot k, \ldots, \omega^3, \ldots, \omega^k, \ldots, \omega^k \cdot m_k + \omega^{k-1} \cdot m_{k-1} + \ldots + m_0,$ $\omega^\omega, \ldots, \omega^\omega \cdot k, \ldots, \omega^{\omega+1}, \ldots, \omega^{\omega \cdot k}, \ldots, \omega^{\omega^\omega}, \omega^{\omega^{\cdot^{\cdot^{\omega}}}}, \ldots,$ gdje je npr. $\omega \cdot 2$ najmanji ordinal veći od svih ordinala oblika $\omega + k$, k prirodni broj; ω^2 najmanji ordinal veći od svih ordinala oblika $\omega \cdot k$; ω^ω najmanji ordinal veći od svih ordinala oblika ω^k. Najmanji ordinal veći od svih ordinala oblika ω^ω, ω^{ω^ω}, $\omega^{\omega^{\omega^\omega}}$, ... označuje se sa ε_0. (Strogo) dobro uređeni skupovi svih ordinalâ koji prethode bilo kojem, od ω nadalje, od naznačenih ordinala još su uvijek samo prebrojivo beskonačni skupovi.

Skupovi u nastavi. U posljednjih pola stoljeća skupovi su ušli u nastavu matematike svih stupnjeva, sve do u osnovne škole, pa čak i u dječje vrtiće. Pritom je, dakako, riječ samo o najosnovnijim elementima te teorije, a ni oni nisu uvijek korektno prezentirani. Taj je pohod teorije skupova dobrim dijelom bio pripravljen i kapitalnim djelom *Éléments de mathématique* Nicolasa Bourbakija (pseudonim grupe mlađih istaknutih francuskih matematičara koja se stalno obnavljala tako da su mlađi članovi zamjenjivali u međuvremenu ostarjele članove) sa sveučilišta u Nancagou (složenica od Nancy i Chicago, gdje su djelovali neki burbakijevci). Program toga djela, inače najveće i najšire sinteze matematike nakon Euklidovih *Elemenata* prije više od dva tisućljeća, bila je izgradnja (u načelu) čitave tadašnje matematike na osnovi teorije skupova. Područja, međutim, poput intuicionističke matematike, koja se u to ne uklapa, burbakijevci su smatrali povijesnim fenomenom koji neće ostati trajnim vlasništvom bitno važnim za matematiku. To im se, među ostalim, osvetilo i u jednom prikazu njihova djela gdje je rečeno da bi i ono moglo biti samo povijesni fenomen.

Pri uključivanju skupova u nastavu matematike nižih stupnjeva bilo je u svijetu, pa i u nas, i promašaja i pretjerivanja. Osnove teorije skupova proglašavale su se *modernom matematikom*, iako je to učenje staro jedno stoljeće. Pojedina rješenja nisu bila najbolja i s pedagoško-metodičke strane. To pokazuju sljedeći primjeri.

Brojenje se djeci od ~7 godina prikazivalo preko uzajamno jednoznačnog preslikavanja skupova. Pritom se, međutim, zaboravlja da djeca te dobi gotovo bezizimno već imaju razvijen pojam apstraktnog prirodnog broja, pa je pokušaj njegova uvođenja tim putem *zakasnio*. S druge strane, za *svjesno* sagledavanje brojenja kao uzajamno jednoznačnog preslikavanja dob od 7 godina nije dovoljna, i s te je strane pothvat *preuranjen*. Drugim riječima, uvođenju brojenja kao uzajamno jednoznačnog preslikavanja bilo bi više mjesta ili u predškolskoj dobi (za djecu od ~5 godina), da se njime potpomogne *nesvjesno* stvaranje pojma o apstraktnom prirodnom broju, ili pak kasnije (možda oko desete ili dvanaeste godine), da se učeniku pokaže u čemu se sastoji bît sâmog procesa brojenja.

U novije doba udio teorije skupova i način njezina prikazivanja u nastavi školâ nižih stupnjeva počinju poprimati opseg i oblik koji zaslužuju i koji o njoj neće stvarati pogrešnih predodžbi.

Sâma teorija skupova u svojem razrađenom obliku nesumnjivo je jedno od najvažnijih i najfascinantnijih područja matematičke znanosti, pa je veliki njemački matematičar D. Hilbert s pravom rekao da je teorija skupova (matematički) raj iz kojeg nas više nikad nitko ne smije protjerati. Pored ostalog, antinomije teorije skupova bile su jedan od glavnih pokretača neslućenog razvoja matematičke logike i osnova matematike u XX. stoljeću. I u tom je smislu poznavanje barem nekih fundamentalnih pojmova, konstrukcija i rezultata teorije skupova neophodan dio izobrazbe suvremenog intelektualca, dok će njezino šire i dublje poznavanje i razumijevanje ostati rezervirano za uži krug specijaliziranih stručnjaka.

LIT.: *N. Bourbaki*, Théorie des ensembles, Fascicule de résultats. Hermann, Paris 1951. – *N. Bourbaki*, Théorie des ensembles, Chapitre I, II. Hermann, Paris 1954. – *N. Bourbaki*, Théorie des ensembles, Chapitre III. Hermann, Paris 1956. – *A. Heyting*, Intuitionism. North-Holland Publ. Comp., Amsterdam 1956. – *A. A. Fraenkel*, *Y. Bar-Hillel*, Foundations of Set Theory. North-Holland Publ. Comp., Amsterdam 1958. – *A. A. Fraenkel,* Abstract Set Theory. Nort-Holland Publ. Comp., Amsterdam 1961. – *K. Kuratowski*, *A. Mostowski*, Set Theory. Nort-Holland Publ. Comp., Amsterdam 1968.

V. Devidé