Borirati se može u granulatu, solnoj kupelji ili plinu. Najčešće se radi u granulatu, pri 800···1000 °C u trajanju 1···6 sati, ohlađuje se sporo, a nakon toga se po potrebi može ponovno austenitizirati i gasiti u ulju (tzv. kaljenje jezgre).

Boriranje je prikladno za sve vrste čelika, iako se najbolje boriraju nelegirani čelici s 0,3···0,6% ugljika. Tek bi velik udio silicija negativno utjecao na površinska svojstva čelika zbog stvaranja ferita u difuzijskoj zoni.

Netopljivost ugljika u boridima uzrok je njegovu potiskivanju iz boridnog sloja, pa se u dijelu difuzijske zone neposredno ispod zone spojeva stvara tzv. ugljikov bedem s povećanim udjelom ugljika, što pridonosi poboljšanju kvalitete difuzijske zone i porastu tlačne opteretivosti površine čelika.

Debljina zone spojeva ovisi o temperaturi i trajanju boriranja, te o udjelu ugljika i legirnih elemenata, pa je to veća što je čelik slabije legiran i što ima manje ugljika. Debljina je obično ~0,15 mm, ali se za ekstremno velike tribološke zahtjeve može produljenjem boriranja na gornjoj temperaturnoj granici postići debljina i do 0,8 mm. Međutim, tada treba posebno paziti te na vrijeme uočiti mogućnost stvaranja nepoželjnoga krhkog borida FeB i to spriječiti.

Termodifuzija metala. Taj je postupak obradbe površinskih slojeva metala razmjerno rijedak i uglavnom još u eksperimentalnoj fazi (tabl. 10). Svrha je difuzijom vanadija i niobija u površinske slojeve obratka povećati njegovu otpornost na trošenje, difuzijom kroma u niskougljične čelike povećati im otpornost prema koroziji, a difuzijom aluminija povećati otpornost čelika prema visokotemperaturnoj oksidaciji.

Tablica 10

UVJETI OBRADBE TERMODIFUZIJOM METALA

Difundirajući metal	*Sredstvo*	*Temperatura* °C	*Površinski slojevi* *Sastav*	*Tvrdoća* HV 0,05	*Debljina* μm
Krom	prah, solna kupelj	900···1200	mješoviti karbidi željeza i kroma	1400···2000	≤50
Vanadij		1000···1100	karbidi vanadija: V_2C $VC (V_4C_3)$	1800 2500	≤20
Niobij	prah	1000···1100	niobijev karbid	~2400	15···20
Aluminij	plin, prah, solna kupelj	~1200	međumetalni spojevi željeza i aluminija	200···1200	≤1000

LIT.: *R. Wilson*, Metallurgy and Heat Treatment of (Tool) Steels. McGraw Hill, London–New York–Düsseldorf–Montreal–Paris 1975. – *H. J. Eckstein*, Wärmebehandlung von Stahl. VEB Deutscher Verlag für Grundstoffindustrie, Leipzig 1979. – *E. Hornbogen*, Werkstoffe. Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg–New York 1979. – *J. Burke*, The Kinetics of Phase Transformations in Metals. Pergamon Press, Oxford–London–Edinburgh–New York–Paris–Frankfurt 1980. – *W. Schatt*, Einführung in die Werkstoffwissenschaft. VEB Deutscher Verlag für Grundstoffindustrie, Leipzig [4]1981. – *М. И. Гольдштейн, С. В. Грачев, Ю. Г. Векслер*, Специальные стали. Металлургия, Москва 1985. – *I. Novikov*, Theory of Heat Treatment of Metals. Mir-Publishers, Moskva 1987.

M. Novosel

TOPOLOGIJA, grana suvremene matematike unutar koje se proučavaju prostori i neprekidna preslikavanja prostorâ. Na neprekidna se preslikavanja može gledati kao na funkcije kojima pogreške u rezultatu ostaju unutar zadanih granica ako se ulazni podaci uzimaju s dovoljnom točnošću. Da bi taj iskaz dobio egzaktno značenje, moraju područje definicije i područje vrijednosti preslikavanja imati određenu strukturu, što ih čini prostorima.

Topologija (grč. τοπος *topos* mjesto) ubraja se u temeljne matematičke discipline i primjenjuje se u mnogim područjima matematike, napose u matematičkoj analizi, funkcionalnoj analizi, diferencijalnim jednadžbama, geometriji i topološkoj algebri. Topologija odnedavno daje nove uvide i u teorijsku fiziku, a neki su njezini dijelovi važni i u kemiji (struktura molekula).

Najraniji se topološki teoremi odnose na poligone i poliedre. Tako su već R. Descartes (1596–1650) i L. Euler (1707–1783) našli važnu formulu $b_0 - b_1 + b_2 = 2$, koja vezuje broj vrhova, bridova i područja svake dekompozicije sferne (kugline) plohe $\mathbf{S}^2$. Među začetnike topologije treba ubrojiti K. F. Gaussa (1777–1855), koji je uveo indeks zauzlanosti dviju zatvorenih krivulja i dokazao tzv. *osnovni teorem algebre*, A. F. Möbiusa (1790–1868), koji je uveo baricentrične koordinate, I. B. Listinga (1808–1882) od kojega potječe naziv topologija, H. Grassmanna (1809–1877), koji je proučavao *n*-dimenzionalni euklidski prostor i B. Riemanna (1826–1866), koji je definirao *n*-dimenzionalne mnogostrukosti. Osnivačima topologije mogu se smatrati G. Cantor (1845–1918) i H. J. Poincaré (1854–1912). Cantor je ne samo zasnovao teoriju skupova (v. *Teorija skupova*, TE 12, str. 725), već je dao i važne priloge topologiji skupova u euklidskom prostoru i time zasnovao skupovnu topologiju. Poincaré je proučavao *n*-dimenzionalne mnogostrukosti koje dopuštaju dekompoziciju u ćelije. Definirao je tzv. *Bettijeve brojeve* (rangovi grupa homologije), koji daju podatke o povezanosti mnogostrukosti. Time je postavio temelje kombinatorne, odnosno algebarske topologije.

Skupovna topologija u svom je daljem razvoju u prvom redu bila usmjerena na probleme iz teorije realnih funkcija i funkcionalne analize. Važne su doprinose u ranoj fazi dali M. Fréchet (1878–1973), F. Hausdorff (1868–1942), K. Kuratowski (1896–1980), P. S. Aleksandrov (1896–1982) i P. S. Uryson (1898–1924). Iz skupovne topologije razvila se *opća topologija* (teorija topoloških prostora), *skupovno-teorijska topologija* (proučava topološke probleme ovisne o aksiomatici teorije skupova), *kategorijska topologija* (proučava razne topološke kategorije), *topologija kontinuuma* (proučava povezane kompaktne prostore) i *teorija dimenzije*.

Na razvoj kombinatorne topologije u prvom su redu utjecali problemi geometrije i teorije funkcija kompleksne varijable, pa su glavni objekt proučavanja bili poliedri i mnogostrukosti. U ranijoj fazi razvoja bitan su doprinos dali L. E. J. Brouwer (1881–1966), S. Lefschetz (1884–1972), H. Hopf (1894–1971), P. S. Aleksandrov, J. H. C. Whitehead (1904–1960), K. Borsuk (1950–1982) i S. Pontrjagin (1908–1988). Iz kombinatorne topologije razvile su se neke poddiscipline današnje topologije: *algebarska topologija* (proučava topološki invarijantne algebarske objekte), *diferencijalna topologija* (proučava diferencijalne mnogostrukosti) i *geometrijska topologija* (uključuje teoriju po dijelovima linearnih preslikavanja i teoriju smještanja).

Topološki prostori i neprekidna preslikavanja. Osnovne se definicije topologije iskazuju jezikom teorije skupova (v. *Teorija skupova*, TE 12, str. 725). *Topološka struktura* na skupu X jest skup $\mathcal{U}$ podskupova od X sa sljedeća tri svojstva: *a*) proizvoljna unija članova od $\mathcal{U}$ član je od $\mathcal{U}$; *b*) presjek konačnog broja članova od $\mathcal{U}$ član je od $\mathcal{U}$; *c*) X i prazni skup $\emptyset$ članovi su od $\mathcal{U}$. Podskup $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{U}$ je *baza topološke strukture* $\mathcal{U}$ ako se svaki član od $\mathcal{U}$ može prikazati kao unija nekih članova od $\mathcal{B}$. *Topološki prostor* je skup X zajedno s nekom topološkom strukturom $\mathcal{U}$ na X. Elementi od X zovu se *točke*, a elementi od $\mathcal{U}$ *otvoreni* skupovi prostora X. Podskup $F \subseteq X$ *zatvoren* je ako je otvoren skup svih točaka $x \in X$ koje ne pripadaju skupu F. Podskup $V \subseteq X$ *okolina* je točke $x \in X$ ako postoji otvoren skup $U \subseteq X$ sa svojstvom da je $x \in U \subseteq V$.

Među najvažnije primjere topoloških prostora ubraja se *prostor realnih brojeva* $\mathbf{R}$ (v. *Diferencijalni račun*, TE 3, str. 288). Jednu od baza topološke strukture prostora $\mathbf{R}$ tvore svi intervali $(a,b) \subseteq \mathbf{R}$. *Metrika* na skupu X jest realna funkcija $d: X \times X \rightarrow \mathbf{R}$, definirana na skupu $X \times X$ svih uređenih parova elemenata od X, koja zadovoljava četiri svojstva navedena u članku *Diferencijalni račun*, TE 3, str. 289.

Metrički prostor je skup X na kojemu je definirana neka metrika. Svaki metrički prostor X ujedno je i topološki prostor. Bazu topologije tvore sve kugle u X. *Kugla* $K(X_0, r)$, sa središtem u točki x_0 i polumjerom $r > 0$, skup je svih točaka $x \in X$ za koje je $d(x, x_0) < r$. Kako je $\mathbf{R}^n$ metrički prostor, on je ujedno i topološki prostor i zove se *n-dimenzionalni euklidski prostor*.

Svaki podskup Y topološkog prostora X i sam je topološki prostor. Otvoreni skupovi od Y dobiju se presijecanjem otvorenih skupova od X podskupom Y. Skup svih točaka iz $\mathbf{R}^{n+1}$, koje su udaljene od ishodišta O za jedinicu (najviše za jedinicu), čini *n-dimenzionalnu sferu* $\mathbf{S}^n$ (*(n+1)-dimenzionalnu ćeliju* $\mathbf{B}^{n+1}$). Kao podskupovi od $\mathbf{R}^{n+1}$, skupovi $\mathbf{S}^n$ i $\mathbf{B}^{n+1}$ su topološki prostori. I mnoge druge konstrukcije s topološkim prostorima daju nove topološke prostore. Na primjer, *direktni produkt* $X \times Y$ prostora X i Y je prostor kojemu bazu tvore skupovi $U \times V$, gdje je U otvoren skup u X, a V otvoren skup u Y. Sve to pokazuje da je klasa topoloških prostora vrlo opsežna.

Preslikavanje $f: X \rightarrow Y$ među topološkim prostorima *neprekidno je u točki* $x_0 \in X$ ako za svaku okolinu V točke $f(x_0)$ postoji okolina U točke x_0 sa svojstvom da je $f(U) \subseteq V$, tj. da je $f(x) \in V$ za svaku točku $x \in U$. Okolina V predstavlja područje dopuštenog odstupanja približne vrijednosti $f(x)$ od točne vrijednosti $f(x_0)$.

Slično, U predstavlja područje kojim je određena potrebna točnost varijable x. Za preslikavanje $f: X \to Y$ kaže se da je *neprekidno* ako je neprekidno u svakoj točki $x_0 \in X$.

Za metričke je prostore preslikavanje $f: X \to Y$ neprekidno u točki $x_0 \in X$ ako i samo ako za svaki realni broj $\varepsilon > 0$ postoji realan broj $\delta > 0$ takav da $d(x, x_0) < \delta$ povlači $d(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$ (v. *Diferencijalni račun*, TE 3, str. 291). Osnovna je činjenica da je kompozicija $gf: X \to Z$ neprekidnih preslikavanja $f: X \to Y$ i $g: Y \to Z$ ponovno neprekidno preslikavanje te da je identično preslikavanje $1: X \to X$ neprekidno. Ta svojstva čine topološke prostore i neprekidna preslikavanja *kategorijom* (u smislu teorije kategorija).

Za neprekidno preslikavanje $f: X \to Y$ kaže se da je *homeomorfizam* ako postoji neprekidno preslikavanje $g: Y \to X$ sa svojstvom da je $gf = 1$ i $fg = 1$. Ako za prostore X i Y postoji homeomorfizam $f: X \to Y$, onda su ti prostori *homeomorfni*. To intuitivno znači da je moguće prevesti jedan prostor u drugi »bez trganja i lijepljenja«, kao da su od elastične tvari. Na primjer, kvadrat i krug su homeomorfni potprostori od $\mathbf{R}^2$.

Jedna je od osnovnih zadaća topologije klasifikacija prostorâ u klase međusobno homeomorfnih prostora. U tome važnu ulogu imaju *topološke invarijante*, tj. svojstva koja se ne mijenjaju pri homeomorfizmima. Takva je npr. *dimenzija prostora*.

Za vrlo općenite klase prostora, npr. metričke prostore, dimenzija se definira pomoću pojma pokrivača. *Otvoren pokrivač* prostora X svaka je familija $\mathscr{V} = \{V_\alpha, \alpha \in A\}$ otvorenih podskupova $V_\alpha \subseteq X$ sa svojstvom da je njihova unija čitav X. Pokrivač $\mathscr{W} = \{W_\beta, \beta \in B\}$ profinjuje (usitnjuje) pokrivač $\mathscr{V}$ ako je svaki $W_\beta \in \mathscr{W}$ sadržan u nekom $V_\alpha \in \mathscr{V}$. Po definiciji je $\dim X \leqq n$ ako se svaki otvoreni pokrivač $\mathscr{V}$ od X može profiniti nekim otvorenim pokrivačem $\mathscr{W}$ sa svojstvom da je svaka točka $x \in X$ sadržana u najviše $n+1$ članova pokrivača $\mathscr{W}$. Iz takve je definicije jasno da je dimenzija topološka invarijanta. Za euklidski prostor $\mathbf{R}^n$ vrijedi da je $\dim \mathbf{R}^n = n$. Dokaz nije jednostavan i ubraja se među prve značajnije uspjehe topologije (L. E. J. Brouwer, 1913). Posljedica je da za $m \neq n$ prostori $\mathbf{R}^m$ i $\mathbf{R}^n$ nisu homeomorfni.

U topološkim se prostorima može definirati konvergencija nizova točaka baš kao i u prostoru $\mathbf{R}^n$ (v. *Diferencijalni račun*, TE 3, str. 290). Općenitije se umjesto nizova promatraju mreže točaka (x_α), gdje α prolazi skupom indeksa A, koji je uređen nekom uređajnom relacijom $\leqq$ i još je *usmjeren*, što znači da za svaka dva elementa $\alpha', \alpha'' \in A$ postoji $\alpha \in A$, koji je veći od oba. Da bi se osigurala jedinstvenost limesa (ako postoji), treba zahtijevati da prostor X bude *Hausdorffov*, tj. da za svaki par različitih točaka $x, y \in X$ postoje okoline U, V od x, y, koje se ne sijeku. Uvođenjem prikladnih *aksioma separacije* izdvojene su i mnoge druge važne klase prostorâ. Na primjer, prostor X je *normalan* ako za svaka dva zatvorena skupa F, $H \subseteq X$, koji se ne sijeku, postoje otvoreni skupovi U, V, koji se ne sijeku i sadrže F, odnosno H. Metrički prostori pripadaju normalnim prostorima. Obrnuto, ako normalan prostor X ima prebrojivu bazu, onda se topološka struktura prostora X može dobiti iz neke metrike, tj. prostor X je *metrizabilan*.

Među najvažnije vrste prostora ubrajaju se *kompaktni* prostori. To su prostori kojima se svaki otvoreni pokrivač može profiniti nekim konačnim otvorenim pokrivačem. Podskup je euklidskog prostora $\mathbf{R}^n$ kompaktan ako i samo ako je zatvoren i omeđen. Na primjer, svaki je zatvoreni segment $[a,b] \subseteq \mathbf{R}$ kompaktan. Ako je $f: X \to Y$ neprekidno preslikavanje na čitav prostor Y, onda kompaktnost prostora X povlači kompaktnost prostora Y Stoga je svaka neprekidna realna funkcija $f: [a,b] \to \mathbf{R}$ omeđena i ima minimum i maksimum.

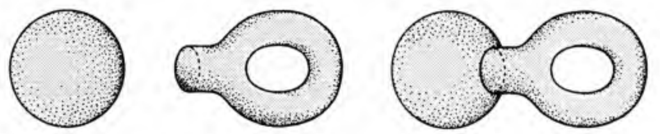
U matematičkoj analizi često treba promatrati prostore funkcija, osobito prostor Y^X svih funkcija $f: X \to Y$. U taj se prostor može uvesti topološka struktura na razne načine. Posebno je važna *kompaktno-otvorena topologija*. Za svaki kompaktni skup $K \subseteq X$ i svaki otvoreni skup $V \subseteq Y$ promatra se skup $F(K, V) \subseteq Y^X$, koji se sastoji od svih funkcija $f: X \to Y$ za koje je $f(K) \subseteq V$. Tako dobiveni skupovi $F(K, V)$ tvore bazu topološke strukture na Y^X.

Poliedri i mnogostrukosti. Za točke $a_0, \ldots, a_k \in \mathbf{R}^n$ kaže se da su u *općem položaju* ako ni jedna m-dimenzionalna ravnina iz $\mathbf{R}^n$ (v. *Geometrija*, TE 6, str. 124), $m < n$, ne sadrži više od $m+1$ točke a_i, tj. točke $a_0, \ldots, a_k$ u općem su položaju ako su vektori $a_1 - a_0, \ldots, a_k - a_0$ linearno nezavisni (v. *Geometrija*, TE 6, str. 122). Na primjer, tri točke iz $\mathbf{R}^2$, koje ne leže na istom pravcu, u općem su položaju. Točke $a_0, \ldots, a_k \in \mathbf{R}^n$ u općem položaju određuju *k-dimenzionalni simpleks* $[a_0, \ldots, a_k] \subseteq \mathbf{R}^n$. Ako se masa 1 raspodijeli na sve moguće načine na točke $a_0, \ldots, a_k$, pripadna će težišta opisati upravo simpleks $[a_0, \ldots, a_k]$. Na primjer, za točke $a_0, a_1, a_2 \in \mathbf{R}^2$ u općem položaju, $[a_0, a_1, a_2]$ je trokut s vrhovima a_0, a_1, a_2.

Konačni simplicijalni kompleks K konačan je skup simpleksa σ iz nekog euklidskog prostora $\mathbf{R}^n$ sa svojstvom da stranice svakog $\sigma \in K$ pripadaju skupu K i da je presjek svakog para simpleksa $\sigma_1, \sigma_2 \in K$, simpleks iz K koji je zajednička stranica simpleksa σ_1 i σ_2. Za *beskonačne simplicijalne komplekse* još se zahtijeva da se simpleksi od K nigdje ne gomilaju u $\mathbf{R}^n$. Tijelo $|K|$ *simplicijalnog kompleksa* K unija je svih njegovih simpleksa. *Poliedar* je potprostor od $\mathbf{R}^n$, koji je tijelo $|K|$ nekog simplicijalnog kompleksa iz $\mathbf{R}^n$. Kompleks K *triangulacija* je poliedra K.

Svako preslikavanje vrhova simpleksa $a_0, \ldots, a_k$ u vrhove simpleksa $b_0, \ldots, b_m$ proširuje se na jedinstveni način do linearnog preslikavanja među samim simpleksima. Svako preslikavanje vrhova kompleksa K u vrhove kompleksa L, sa svojstvom da se vrhovi simpleksa iz K preslikavaju u vrhove simpleksa iz L, zove se *simplicijalno preslikavanje*. Ono inducira preslikavanje $|K| \to |L|$ među pripadnim tijelima, za koje se kaže da je *po dijelovima linearno* ili kraće da je *PL-preslikavanje*. Takva su preslikavanja uvijek neprekidna. Obrnuto, svako se neprekidno preslikavanje među poliedrima može po volji dobro aproksimirati nekim *PL-preslikavanjem*. Poliedri i *PL-preslikavanja* tvore važnu *PL-kategoriju* koju proučava *PL-topologija*.

Topološka n-dimenzionalna mnogostrukost (bez ruba) topološki je prostor X, koji je *lokalno homeomorfan* euklidskom prostoru $\mathbf{R}^n$, tj. svaka točka $x \in X$ ima otvorenu okolinu, koja je homeomorfna nekom otvorenom skupu iz $\mathbf{R}^n$. Najčešće se dodatno zahtijeva da je X metrizabilan prostor s prebrojivom bazom. Za kompaktne mnogostrukosti (bez ruba) kaže se da su *zatvorene*. $\mathbf{R}^n$ i $\mathbf{S}^n$ primjeri su n-dimenzionalnih mnogostrukosti. $\mathbf{S}^n$ je zatvorena mnogostrukost, a $\mathbf{R}^n$ nije. Zbog mnogih je primjena teorija mnogostrukosti najvažniji, ali i najteži dio topologije. Mnogostrukosti se sastoje od komponenata koje su povezane mnogostrukosti, tj. svake se dvije točke $x_0, x_1 \in X$ mogu spojiti nekim putem. To znači da postoji neprekidno preslikavanje segmenata $[0,1] \subseteq \mathbf{R}$ u X, koje točke 0,1 prevodi u točke x_0, odnosno x_1. Za $n = 1$ postoje samo dvije povezane mnogostrukosti, i to $\mathbf{R}^1$ i $\mathbf{S}^1$. Već za $n = 2$ postoji beskonačno međusobno nehomeomorfnih povezanih mnogostrukosti. Osim $\mathbf{S}^2$ to su zatvorene plohe koje se dobiju dodavanjem konačnog broja *ručki* (v. *Teorija grafova*, TE 12, sl. 13 a). Ručka se dodaje sferi tako što se iz sfere $\mathbf{S}^2$ ukloni mali disk, te se uzduž nastalog ruba zalijepi rub ručke (sl. 1). Primjeri zatvorenih orijentabilnih 2-mnogostrukosti jesu sfera, torus i dvostruki torus (v. *Teorija grafova*, TE 12, sl. 12 i 13 b). Postoje i *neorijentabilne* zatvorene plohe. One se dobiju iz orijentabilnih ploha tako što se izreže mali disk i uzduž njegova ruba zalijepi se *Möbiusova vrpca*. Möbiusova se vrpca dobije ako se jedan par suprotnih stranica pravokutnika međusobno zalijepi, i to s promjenom orijentacije (sl. 2). Ostale dvije stranice daju 1-sferu $\mathbf{S}^1$, koja je rub Möbiusove vrpce. Među neorijentabilnim zatvorenim plohama najjednostavnija je projektivna ravnina, koja se dobije lijepljenjem Möbiusove vrpce na sferu $\mathbf{S}^2$. Neorijentabilne zatvorene plohe nije lako predočiti jer se ne mogu smjestiti u 3-dimenzionalni euklidski prostor $\mathbf{R}^3$, pa treba posegnuti za prostorom $\mathbf{R}^4$. Svaka povezana zatvorena 2-mnogostrukost homeomorfna je točno jednoj od spomenutih ploha.

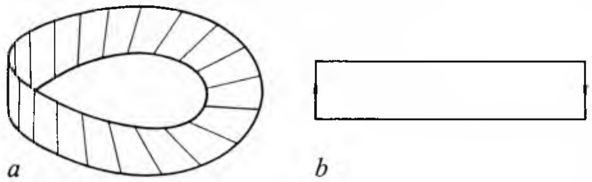


a *b* *c*

Sl. 1. Dodavanje ručke sferi. *a* sfera, *b* ručka, *c* sfera s ručkom

Potpuna topološka klasifikacija 3-dimenzionalnih mnogostrukosti otvoren je problem, iako su u novije vrijeme u teoriji 3-dimenzionalnih mnogostrukosti postignuti primjetni uspjesi (W.

Thurston), i to primjenom hiperboličke geometrije (v. *Geometrija*, TE 6, str. 120).



a b

Sl. 2. Möbiusova vrpca (*a*) nastala lijepljenjem suprotnih stranica pravokutnika (*b*) s promijenjenom orijentacijom

Već u samom početku teorije mnogostrukosti pojavilo se više principijelno važnih problema, a na njihovo je rješenje trebalo dugo čekati. Tako je tek 1962. godine J. Milnor oborio *osnovnu slutnju kombinatorne topologije*, prema kojoj su svaka dva homeomorfna poliedra trebala biti ekvivalentna i u *PL*-kategoriji. Godine 1969. R. C. Kirby i L. C. Siebenmann pokazali su da ta slutnja ne vrijedi ni za *PL-mnogostrukosti*, tj. n-mnogostrukosti koje dopuštaju triangulaciju sa svojstvom da su zatvorene zvijezde vrhova triangulacije *PL*-ekvivalentne n-simpleksu. *Zatvorena zvijezda* nekog vrha unija je svih simpleksa triangulacije koji taj vrh sadrže. Isti su autori pokazali da ima triangulabilnih mnogostrukosti koje nisu *PL-mnogostrukosti*. Postoje i topološke mnogostrukosti koje nisu triangulabilne.

Posebno su važna vrsta mnogostrukosti *diferencijalne mnogostrukosti*. Svaka se topološka n-mnogostrukost može pokriti otvorenim skupovima U, koji su homeomorfni otvorenim skupovima V iz $\mathbf{R}^n$. Za diferencijalne mnogostrukosti zadani su takvi homeomorfizmi $h: V \to U$, da su za svaki par h_1, h_2 homeomorfizmi $h_2^{-1} h_1$ i $h_1^{-1} h_2$ diferencijabilna preslikavanja (klase C^∞) među otvorenim podskupovima od $\mathbf{R}^n$, tamo gdje su definirani. To znači da ta preslikavanja imaju neprekidne derivacije svih redova (v. *Diferencijalni račun*, TE 3, str. 296).

Na diferencijalnim mnogostrukostima moguće je razviti diferencijalni račun. Napose, moguće je definirati *diferencijabilna preslikavanja* među diferencijalnim mnogostrukostima. Tako se dobiva *diferencijalna kategorija* koju izučava *diferencijalna topologija*. Važna je činjenica da se svaka diferencijalna mnogostrukost može shvatiti i kao *PL-mnogostrukost* (S. S. Cairns, 1934. i J. H. C. Whitehead, 1940). J. Milnor je 1956. pokazao da ima topoloških mnogostrukosti koje dopuštaju više različitih diferencijalnih struktura. Takva je npr. sfera $\mathbf{S}^7$. Da postoje *PL-mnogostrukosti* koje ne dopuštaju nikakvu diferencijalnu strukturu dokazao je 1960. godine M. A. Kervaire.

Uvođenjem skalarnog produkta u tangencijalne prostore diferencijalnih mnogostrukosti dobivaju se *Riemannove mnogostrukosti* u kojima se može govoriti o zakrivljenosti. Riemannove mnogostrukosti i još općenitije *mnogostrukosti afine koneksije* predmet su proučavanja *diferencijalne geometrije*.

Među najvažnije probleme geometrijske topologije ubraja se problem smještanja jedne mnogostrukosti (poliedra) u drugu, a napose problem smještanja u $\mathbf{R}^n$, odnosno u $\mathbf{S}^n$. *Topološko smještanje* mnogostrukosti X u mnogostrukost Y jest homeomorfizam h između X i nekog potprostora od Y. Najvažnije je *lokalno plosnato smještanje*, tj. slučaj kad je $h(X)$ neka podmnogostrukost od Y. Za *PL-smještanje* zahtijeva se da je $h: X \to h(X)$ *PL*-ekvivalencija, a za *diferencijabilno smještanje* da je to diferencijabilna ekvivalencija. Teorije topološkog, lokalno plosnatog, diferencijabilnog i *PL*-smještanja bitno se razlikuju ne samo po metodama već i po rezultatima. Na primjer, A. Haefliger je 1962. pokazao da u diferencijabilnom slučaju sfera $\mathbf{S}^{4k-1}$ dopušta više različitih tipova smještanja u $\mathbf{S}^{6k}$, $k = 1, 2, \ldots$. Naprotiv, u PL-teoriji postoji samo jedan tip smještanja sfere $\mathbf{S}^p$ u sferu $\mathbf{S}^n$, ako je $n - p \geqq 3$ (E. C. Zeeman, 1963). Jedan je od najstarijih problema teorije smještanja problem klasifikacije *uzlova*, tj. *PL*-smještanja sfere $\mathbf{S}^1$ u $\mathbf{R}^3$.

Algebarska topologija. U algebarskoj topologiji određenim se postupcima topološki problemi transformiraju u algebarske probleme. Prostorima se pridružuju neke algebarske tvorevine, dok se neprekidnim preslikavanjima f među prostorima pridružuju određena preslikavanja f_* među pridruženim algebarskim tvorevinama. Pritom mora kompoziciji preslikavanja gf biti pridružena kompozicija $g_* f_*$, a identičkom preslikavanju prostora mora biti pridruženo identičko preslikavanje pridružene algebarske tvorevine. Za takvo se pridruženje kaže da je *funktorsko*.

Grupe su najčešće algebarske tvorevine u algebarskoj topologiji. Grupa G je skup u kojemu je definirana operacija množenja, za koju vrijedi zakon asocijacije $x(yz) = (xy)z$, postoji jedinica 1, tj. element sa svojstvom $x\,1 = 1\,x = x$, i za svaki $x \in G$ postoji inverzni element x^{-1}, tj. element sa svojstvom $x^{-1} x = x x^{-1} = 1$. Grupa je *komutativna* ako vrijedi i zakon komutacije $xy = yx$. Najjednostavnija grupa je trivijalna grupa 0, koja ima jedan jedini element 0. Skup $\{-1, 1\}$ uz uobičajeno množenje primjer je konačne netrivijalne grupe. Najjednostavniju beskonačnu grupu tvori skup cijelih brojeva $\mathbf{Z}$ uz uobičajeno zbrajanje. Najvažnija su preslikavanja među grupama *homomorfizmi*. To su preslikavanja $f: G \to H$ koja čuvaju množenje, tj. vrijedi $f(xy) = f(x) f(y)$. *Prstenovi* su nešto složeniji od grupa. To su komutativne grupe s operacijom zbrajanja, gdje je zadana još jedna asocijativna operacija množenja. Pritom se zahtijeva da vrijede zakoni distribucije $x(y_1 + y_2) = xy_1 + xy_2$, $(x_1 + x_2)y = x_1 y + x_2 y$.

Među najvažnije konstrukcije algebarske topologije ubrajaju se *grupe homotopije* $\pi_n(Y)$ prostora Y, $n = 1, 2, \ldots$. Dva su neprekidna preslikavanja $f, g: X \to X$ homotopna ako postoji jednoparametarska familija preslikavanja $H_t: X \to Y$, $0 \leqq t \leqq 1$, sa svojstvom da je $H_0 = f$, $H_1 = g$ i da $H_t(x)$ neprekidno ovisi o paru (x, t). To znači da je moguće na neprekidan način povezati preslikavanja f i g. Za zadanu točku $y_0 \in Y$ definira se grupa homotopije $\pi_n(Y, y_0)$ tako što se promatraju klase homotopnih preslikavanja $f: \mathbf{S}^n \to Y$, koja prevode neku zadanu točku x_0 od $\mathbf{S}^n$ u točku y_0. Pritom treba biti ispunjen i uvjet $H_t(x_0) = y_0$, za sve vrijednosti od t. Uvođenje bazne točke y_0 omogućuje da se na dobivenom skupu klasa definira množenje i da se tako dobije grupa. Za $n = 1$ dobiva se *fundamentalna grupa* $\pi_1(Y, y_0)$. Njezini su elementi dani zatvorenim putovima u Y, koji počinju i završavaju u točki y_0. Nadovezivanjem dvaju takvih putova dobiva se novi zatvoreni put, koji određuje produkt zadanih elemenata fundamentalne grupe. Kod putovima povezanih prostorâ Y grupa $\pi_n(Y, y_0)$ ne ovisi o točki y_0, pa se jednostavnije označuje $\pi_n(Y)$. Fundamentalna grupa općenito je nekomutativna, dok su grupe $\pi_n(Y, y_0)$ komutativne, za $n \geqq 2$. Mnogi se važni topološki problemi svode na određivanje grupa homotopije. Iako im je definicija jednostavna, njihovo je određivanje gotovo uvijek težak problem, a metode izračunavanja grupa homotopije spadaju u tehnički najsloženije postupke suvremene matematike. Tako npr. nisu poznate niti sve grupe $\pi_n(\mathbf{S}^m)$.

Neprekidno je preslikavanje $f: X \to Y$ *homotopska ekvivalencija* ako postoji neprekidno preslikavanje $g: Y \to X$ sa svojstvom da su kompozicije gf i fg homotopne identičnom preslikavanju. Važan je teorem J. H. C. Whiteheada da je f homotopska ekvivalencija povezanih poliedara X i Y ako inducira ekvivalenciju f_* grupa homotopije za svaki $n = 1, 2, \ldots$. Prostori X i Y istog su *homotopskog tipa* ako među njima postoji neka homotopska ekvivalencija $f: X \to Y$. Homeomorfni prostori uvijek su istog homotopskog tipa, dok obrnuti zaključak općenito ne vrijedi.

Prema *Poincaréovoj hipotezi* povezana zatvorena n-dimenzionalna mnogostrukost homeomorfna je sferi $\mathbf{S}^n$ ako ima homotopski tip sfere $\mathbf{S}^n$, tj. ako joj se grupe homotopije podudaraju s grupama homotopije sfere $\mathbf{S}^n$. Za $n = 3$ tu je hipotezu postavio Poincaré još 1900. (u ispravljenu obliku 1904). Za $n = 1$ i $n = 2$ tvrdnja se lako provjeri. Za $n \geqq 5$ dokazana je tek šezdesetih godina (S. Smale, J. Stallings, E. C. Zeeman, M. H. A. Newman). M. Freedman je 1981, na opće iznenađenje, uspio topološki klasificirati 4-mnogostrukosti X za koje je $\pi_1(X) = 0$. Njegovi rezultati uključuju i potvrdu Poincaréove hipoteze za $n = 4$. Hipoteza za $n = 3$ nije ni dokazana ni opovrgnuta i to je danas najpoznatiji otvoreni topološki problem.

U topologiji je u širokoj primjeni još jedna vrsta grupa, koje su topološke pa i homotopske invarijante. To su *grupe homologije* $H_n(X)$, $n = 0, 1, \ldots$. Njihova definicija je složena, ali se ipak u mnogim slučajevima lako računaju, npr. u kompaktnih poliedara. Da bi se dobila n-ta grupa $H_n(X)$, promatraju se u X n-dimenzionalne tvorevine koje se zovu n-lanci. Posebno se promatraju *zatvoreni n-lanci* zvani *n-ciklusi*. Dva n-ciklusa smatraju se ekvivalentnima (*homolognima*) ako je njihova razlika rub nekog $(n+1)$-lanca. Grupa $H_n(X)$ sastoji se od klasa međusobno homolognih n-ciklusa. Veza grupa homologije s grupama homotopije opisana je teoremom W. Hurewicza: ako su grupe $\pi_1(X) = 0$, $H_1(X) = \ldots = H_{n-1}(X) = 0$, $n \geqq 2$, onda je $\pi_n(X) = H_n(X)$. To je često put kojim se uspijeva izračunati $\pi_n(X)$. Na primjer, za $n \geqq 2$ je $\pi_1(\mathbf{S}^n) = 0$, $H_1(\mathbf{S}^n) = \ldots = H_{n-1}(\mathbf{S}^n) = 0$, dok je $H_n(\mathbf{S}^n) = \mathbf{Z}$ grupa cijelih brojeva. Zato je i $\pi_n(\mathbf{S}^n) = \mathbf{Z}$, što znači da postoji obostrano jednoznačna korespondencija među klasama homotopije preslikavanja $f: \mathbf{S}^n \to \mathbf{S}^n$ i cijelim brojevima. Cijeli broj koji pri toj korespondenciji pripada zadanom preslikavanju f zove se *stupanj preslikavanja* f i pokazuje koliko je puta preslikavanjem f sfera $\mathbf{S}^n$ »namotana« na samu sebe.

Kao ilustracija upotrebe grupa homologije u rješavanju topoloških problema može dobro poslužiti dokaz teorema da ne postoji neprekidno preslikavanje $r: \mathbf{B}^{n+1} \to \mathbf{S}^n$, $(n+1)$ ćelije $\mathbf{B}^{n+1}$ na svoj rub $\mathbf{S}^n$, koje ostavlja točke ruba nepomičnima. Označi li se sa $i: \mathbf{S}^n \to \mathbf{B}^{n+1}$ preslikavanje koje ne pomiče točke sfere $\mathbf{S}^n$, može se taj uvjet napisati u obliku $ri = 1$. Svako neprekidno preslikavanje f određuje neki homomorfizam f_* grupa homologije i to je pridruženje funktorsko. Zbog toga se dobiva jednakost $r_* i_* = 1$. Kako je prostor $\mathbf{B}^{n+1}$ homotopskog tipa točke, a grupe homologije točke iščezavaju, to je $H_n(\mathbf{B}^{n+1}) = 0$ i zato je $r_* i_* = 0$. S druge je strane $H_n(\mathbf{S}^n) = \mathbf{Z} \neq 0$, što daje kontradikciju. Slično rasuđivanje može se provesti i s *grupama kohomologije* $H^n(X)$. Odnos tih grupa prema grupama homologije može se usporediti s odnosom vektorskog prostora prema prostoru svih linearnih skalarnih funkcija na tom vektorskom prostoru. Za grupe kohomologije preslikavanje $f: X \to Y$ određuje homomorfizam $f^*: H^n(Y) \to H^n(X)$, gdje su područje definicije i područje vrijednosti zamijenili uloge (kontravarijantni funktor). Grupe kohomologije s realnim koeficijentima neke diferencijalne mnogostrukosti mogu se opisati i kao grupe diferencijabilnih diferencijalnih formi na toj mnogostrukosti (teorem G. de Rhama). Prednost je grupa kohomologije pred grupama homologije što se grupe $H^n(X)$, $n = 0, 1, \dots$, mogu zajedno organizirati u prsten (*prsten kohomologije*), koji je također homotopska invarijanta. U taj prsten moguće je uvođenje daljih operacija (*kohomološke operacije*). Tako obogaćene strukture uspješno se primjenjuju u rješavanju vrlo složenih topoloških problema.

U algebarskoj topologiji razvijene su i mnoge druge invarijante. Među najvažnijima su *K-grupe*. Promatraju se *vektorski svežnjevi* nad zadanim prostorom X. Dobiju se tako što se svakoj točki $x \in X$ pridruži neki konačnodimenzionalni vektorski prostor, te se unija tih prostora organizira u novi topološki prostor. Standardni su primjer tangencijalni prostori neke diferencijalne mnogostrukosti, npr. tangencijalne ravnine neke plohe. Grupa $K(X)$ prostora X dobije se tako da se u skupu svih vektorskih svežnjeva nad X uvede određena relacija ekvivalencije (*stabilna ekvivalencija*). $K(X)$ je skup svih pripadnih klasa ekvivalencije uz određenu operaciju zbrajanja. Metodama K-teorije dokazani su mnogi važni geometrijski teoremi. Na primjer, određen je maksimalan broj linearno nezavisnih vektorskih polja na sferi $\mathbf{S}^n$. U posljednje vrijeme kompleksni vektorski svežnjevi nad kompleksnim mnogostrukostima imaju važnu ulogu u nekim područjima teorijske fizike.

Pojmovi i metode algebarske topologije bitno su utjecali na razvoj suvremene matematike, napose algebre. Razvijanjem algebarske topologije postavljeni su temelji *teorije kategorija* i *homološke algebre* (H. Cartan, S. Eilenberg, S. MacLane).

Topološka algebra. U topološkoj algebri promatraju se algebarski objekti snabdjeveni topološkom strukturom. Pritom algebarska i topološka struktura moraju biti usklađene. To daje nove objekte kao što su topološke grupe, topološka polja, itd.

Topološka grupa Hausdorffov je prostor, koji je ujedno i grupa i pritom su množenje i invertiranje neprekidna preslikavanja. Od posebne su važnosti *Liejeve grupe* (S. Lie, 1842–1899). To su topološke grupe koje su ujedno i diferencijalne mnogostrukosti s diferencijabilnim operacijama. Realni brojevi s operacijom zbrajanja, te kompleksni brojevi modula 1 s operacijom množenja, jednostavni su primjeri Liejevih grupa. Važni su primjeri razne grupe regularnih matrica s operacijom množenja matrica (v. *Aritmetika i algebra,* TE1, str. 381), npr. $GL(n, \mathbf{R})$ (opća linearna realna grupa), $U(n)$ (unitarna grupa) i $O(n)$ (ortogonalna grupa).

Grupa transformacija sastoji se od topološkog prostora X, topološke grupe G i *djelovanja* te grupe na X, što znači da svakom elementu $g \in G$ pripada određeni homeomorfizam h_g prostora X na sama sebe. Pritom se zahtijeva da je $h_{g_1 g_2} = h_{g_2} h_{g_1}$ i da je h_1 identično preslikavanje. U specijalnom slučaju $G = \mathbf{Z}$ svodi se proučavanje grupe transformacija na proučavanje homeomorfizma $h: X \to X$ i njegovih iteracija h^n.

Od posebne je važnosti slučaj kada Liejeve grupe diferencijabilno djeluju na nekoj diferencijalnoj mnogostrukosti. Ako je $G = \mathbf{R}$ grupa realnih brojeva s operacijom zbrajanja, dobivaju se *diferencijabilni dinamički sustavi* na X. Takvi sustavi prirodno nastaju kada se na nekoj diferencijalnoj mnogostrukosti promatra diferencijabilno vektorsko polje, što se može tumačiti i kao sustav (autonomnih) običnih diferencijalnih jednadžbi na mnogostrukosti. Ako se $\mathbf{R}$ tumači kao vremenska koordinatna os, tada svakom trenutku t i svakoj točki x_0 mnogostrukosti pripada točka x_t, koja određuje položaj gdje dospijeva točka x_0 nakon vremena t pomicanjem uzduž *trajektorije*, tj. krivulje koja predstavlja rješenje sustava, a prolazi točkom x_0. Teorija dinamičkih sustava bavi se ponašanjem rješenja za velike $|t|$, a nastala je iz klasičnih problema mehanike i u posljednje vrijeme doživljava pravi procvat.

LIT.: *N. E. Steenrod,* The Topology of Fibre Bundles. Princeton University Press, Princeton 1951. – *E. H. Spanier*, Algebraic Topology. McGraw Hill, New York 1966. – *R. Engelking,* General Topology. Polish Sci. Publ., Warszawa, 1977. – *В. А. Рохлин, Д. Б. Фукс,* Начальный курс топологии. Наука, Москва 1977. – *G. W. Whitehead*, Elements of Homotopy Theory. Springer-Verlag, New York 1978. – *J. Palis, W. De Melo,* Geometric Theory of Dynamical Systems: an Introduction. Springer-Verlag, New York 1982. – *J. Dieudonné,* A History of Algebraic and Differential Topology 1900–1960. Birkhaüser, Boston 1989. – *K. Horvatić,* Klasični problemi geometrijske topologije. Tehnička knjiga, Zagreb 1990.

S. Mardešić

TORIJ (Thorium, Th), radioaktivni kemijski element s atomnim brojem 90 i relativnom atomnom masom 232,0381, nalazi se u III. A podskupini periodnog sustava elemenata, među unutrašnjim prijelaznim elementima aktinidima (v. *Aktinij i aktinidi*, TE 1, str. 46). U torijevu su atomu orbitale $6d$ stabilnije od orbitala $5f$, pa mu se pripisuje elektronska konfiguracija prijelaznog elementa, [Rn] $6d^2\,7s^2$.

Torij je otkrio švedski kemičar J. J. Berzelius, koji je 1828. iz minerala torita izdvojio torijev oksid te ga nazvao thorina ili thoria, prema riđobradom norveškom bogu, gromovniku Thoru. Iste je godine Berzelius prvi pripravio kovinski torij u obliku sivog, nečistog praška zagrijavanjem i redukcijom torijeva(IV) klorida s kalijem i natrijem. I. Joliot-Curie i G. C. Schmidt utvrdili su 1898, neovisno jedno o drugome, da je torij prirodno radioaktivna tvar. A. Kuzel i E. Wedekind pripravili su 1914. praškasti torij razmjerno velike čistoće zagrijavanjem torijeva(IV) oksida s fino usitnjenim kalcijem u vakuumu. H. Moisson i O. Hönigschmidt dobili su 1905. vrlo nečist spužvasti kovinski torij elektrolizom bezvodnoga torijeva(IV) klorida u rastaljenoj smjesi natrijeva klorida i kalijeva klorida, a F. H. Driggs i W. C. Lilliendahl 1930. praškasti kovinski torij čistoće veće od 99% elektrolizom kalijeva pentafluorotorata u istoj rastaljenoj smjesi. K. Koizumi uspio je 1949. dobiti kovinsku prevlaku torija na katodi elektrolizom organskih otopina, a 1950. godine A. E. Chester elektrolizom vodenih otopina torijevih soli. Van Arkel i de Boer dobili su 1953. vrlo čist praškasti torij termičkim raspadom plinovitoga torijeva(IV) jodida na užarenoj volframnoj niti. Neke od opisanih metoda poslužile su kao osnova za razvoj komercijalnih postupaka dobivanja torija.

Torij postaje važan tržišni proizvod 1890, kada je austrijski barun Auer von Welsbach za izradbu mrežice za plinske svjetiljke (kasnije nazvane Auerovom mrežicom) upotrijebio smjesu torijeva i cerijeva oksida. Uvođenjem električne rasvjete, torij od 1925. gubi svaku tržišnu važnost, ali zanimljiv postaje opet četrdesetih godina ovog stoljeća kao mogući izvor nuklearne energije.

Danas se torij i njegovi spojevi, napose torijev(IV) oksid, rabe u metalurgiji i u proizvodnji plinskih svjetiljaka s Auerovom mrežicom. Manje se količine torija i njegovih spojeva rabe u proizvodnji vatrostalnih materijala, u kemijskoj industriji, u elektronici, te u proizvodnji fotografske i znanstvene opreme. Međutim, najvažnije je područje primjene torija nuklearna tehnika, gdje on služi kao oplodni materijal za nuklearne reaktore. On, naime, može apsorbirati neutrone te nakon dva uzastopna raspada stvarati uranov izotop ^{233}U:

$$^{232}\mathrm{Th}(\mathrm{n},\gamma)\,^{233}\mathrm{Th} \xrightarrow{\beta^-} {}^{233}\mathrm{Pa} \xrightarrow{\beta^-} {}^{233}\mathrm{U}, \tag{1}$$

koji je fisibilan, tj. spontano se može raspadati u lančanoj nuklearnoj reakciji uz oslobađanje velikih količina energije (v. *Nuklearno gorivo*, TE9, str. 513). Procjenjuje se da je raspoloživa energija iz svjetskih nalazišta torija veća od ukupne raspoložive energije svjetskih nalazišta urana i fosilnih goriva.

Torij se ubraja među radioaktivne elemente i sadrži više prirodnih radioizotopa. Najzastupljeniji je izotop ^{232}Th, koji je zaostao od vremena kada je stvoren svemir i vrlo se sporo raspada. On je prvi član prirodnoga torijeva radioaktivnog raspadnog niza