ležajima, a predviđene su i kabine za invalidne osobe. Na više paluba s javnim prostorom za boravak putnika nalazi se trgovački centar s prodavaonicama, salon, prostor za poslovne sastanke i predavanja, koncerte, noćni klub, prvorazredni restorani, rekreacijski centar, bazeni, saune, solarij itd.

U gradnji takvih brodova istaknuto mjesto zauzima brodogradilište Brodosplit (*Brodograđevna industrija Split*), koje je stranim naručiteljima isporučilo četiri takva broda: *Amorella* i *Isabella* izgrađeni su 1988. i 1989, *Frans Suell* 1992, a *Crown of Scandinavia* 1994. godine.

Brod *Frans Suell* ima 12 paluba, računajući od pokrova dvodna do kormilarnice. Ukupni mu je smještajni kapacitet 2 333 putnika u 686 kabina, koje se nalaze na palubama br. 2, 5, 6, 7, 9 i 11. Javni je prostor uglavnom na palubama br. 7, 8, 10 i 11. Manji se automobili mogu smjestiti na podiznim palubicama (br. 4, ~1000 metara parkirne staze), a veća vozila na palubi br. 3 (vozno-parkirna staza od 2 200 metara). Pokretne palubice za automobile nalaze se s obje strane središnjeg rova. Dobra prolaznost vozila postiže se zahvaljujući velikim pramčanim vratima i rampi (duljina 14,6 m, visina 5 m, širina voznog traka 7 m) te dvostrukoj krmenoj rampi.

Glavne su značajke broda: duljina preko svega 169,4 m, duljina između okomica 149,8 m, najveća širina 28,2 m, najveći gaz 6,25 m, nosivost na najvećem gazu 2 960 t. Propulziju daju četiri srednjohodna Dieselova motora koji su preko reduktora spojeni s dvije osovine s prekretnim vijcima. Brzina od 21,5 čvorova postiže se pri 73,6% najveće snage.

Izletnički brod služi za jednodnevne izlete s razmjerno velikim brojem putnika, na kraćim relacijama i u mirnim morima. Putnici su obično smješteni na glavnoj palubi u salonu, s avionskim sjedalima. To su manji brodovi, duljine 20···40 m i brzine 10···12 čvorova.

Hidrobus je manji plovni objekt za prijevoz putnika na kratkim stalnim relacijama, npr. na rijekama, jezerima, velikim morskim uvalama, odnosno u zaštićenom obalnom pojasu. Svaki putnik ima svoje sjedalo, obično lagane avionske izvedbe. Otvorene palube za šetnju obično nema. Brzina mu je 6···12 čvorova, već prema relaciji. Materijal za gradnju trupa aluminijska je slitina, a za pogon služi brzohodni Dieselov motor s redukcijskim prigonom.

LIT. *R. Munro Smith*, Merchant Ship Types. J. W. Arrowsmith Ltd., Bristol 1975. – *R. Taggart*, Ship Design and Construction. SNAME Edition, New York 1980. – *C. Gallin, H. Hiersig, O. Heiderich*, Ships and their Propulsion System Developments in Power Transmission. Lohmann und Stolterfoht, Witten 1981. – *K. J. Rawson, E. C. Tupper*, Basic Ship Theory, Vol. I i 2. Longman, London–New York 1983. – *E. V. Lewis*, Principles of Naval Architecture, Vol. I, III. SNAME Edition, Jersey City 1988–1989. – *J. B. Caldwell, G. Ward*, Practical Design of Ships and Mobile Units, Vol. 1 i 2. Elsevier Applied Science Edition, London–New York 1992.

I. Belamarić

TRIGONOMETRIJA, dio geometrije unutar kojeg se proučavaju trigonometrijskim funkcijama opisani odnosi između stranica i kutova u ravninskom ili sfernom trokutu. Pomoću trigonometrijskih funkcija računaju se elementi trokuta, svojstva periodičnih pojava te izvode druge funkcije (v. *Funkcije*, TE 5, str. 623).

Trigonometrijske funkcije. Kut se može smjestiti u pravokutni koordinatni sustav tako da se prvi njegov krak poklapa s pozitivnim polupravcem osi x (sl. 1). Ako su x i y koordinate bilo koje točke A drugog kraka tog kuta, a r udaljenost te točke od ishodišta 0, tada omjeri brojeva x, y, r ne ovise o izboru točke A na kraku, nego samo o svojstvu promatrana kuta, njegovoj mjeri α (v. *Planimetrija*, TE 10, str. 294). Ti su omjeri vrijednosti pripadne *trigonometrijske funkcije mjere kuta* α. Treba zapaziti da se i geometrijski objekt i njegova mjera zovu kutom i jednako označavaju. Trigonometrijske se funkcije zovu (i označavaju) redom *sinus* (sin), *kosinus* (cos), *tangens* (tan; tg), *kotangens* (cot; ctg), *sekans* (sec), *kosekans* (csc; cosec). Definiraju se omjerima:

$$\sin\alpha = \frac{y}{r}, \quad \cos\alpha = \frac{x}{r}, \tag{1a}$$

$$\tan\alpha = \frac{y}{x}, \quad \cot\alpha = \frac{x}{y}, \tag{1b}$$

$$\sec\alpha = \frac{r}{x}, \quad \csc\alpha = \frac{r}{y}. \tag{1c}$$

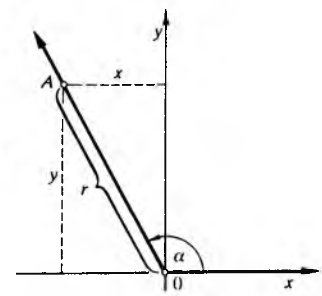
Posljednje dvije funkcije rjeđe se upotrebljavaju jer su to samo recipročne vrijednosti kosinusa i sinusa:

$$\sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha}, \quad \csc\alpha = \frac{1}{\sin\alpha}, \tag{2}$$

a to donekle vrijedi i za kotangens, jer je

$$\cot\alpha = \frac{1}{\tan\alpha}. \tag{3}$$

Treba napomenuti da je apscisa $x=0$ za vrijednosti kutova $\alpha=\pi/2\,\mathrm{rad}=90°$ ili $\alpha=3\pi/2\,\mathrm{rad}=270°$, pa funkcije tangens i sekans nisu definirane. Jednako tako nisu definirane funkcije kotangens i kosekans za $\alpha=\pi\,\mathrm{rad}=180°$. Posebno je definirano da je $\sin 0°=0$, $\cos 0°=1$, $\tan 0°=0$, $\sec 0°=1$, dok $\cot 0°$ i $\csc 0°$ nisu definirani.



Sl. 1. Smještaj kuta u pravokutnomu koordinatnom sustavu

Za kut α određuje se pripadnost jednom od četiriju kvadranata prema tome kojem od kvadranata pripada točka A (sl. 1). Algebarski predznaci vrijednosti trigonometrijskih funkcija ovise o pripadnosti kutova tim kvadrantima (tabl. 1).

Tablica 1

PREDZNACI VRIJEDNOSTI TRIGONOMETRIJSKIH FUNKCIJA PO KVADRANTIMA

Funkcija	*Kvadrant*			
	I.	*II.*	*III.*	*IV.*
sin, csc	+	+	−	−
cos, sec	+	−	−	+
tan, cot	+	−	+	−

Između trigonometrijskih funkcija istoga kuta postoje veze, na primjer

$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}, \tag{4}$$

$$\cot\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}, \tag{5}$$

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1, \tag{6}$$

$$\tan^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha} - 1. \tag{7}$$

Potenciranje trigonometrijske funkcije pojednostavljeno se, ali normirano, označava eksponentom uz znak funkcije, dakle

$$\sin\alpha \cdot \sin\alpha = (\sin\alpha)^2 = \sin^2\alpha, \tag{8}$$

što je različito od funkcije potencije kuta, na primjer

$$\sin(\alpha\cdot\alpha) = \sin\alpha^2. \tag{9}$$

Dvostrane veze između trigonometrijskih funkcija navedene su u tablici 2, a vrijednosti trigonometrijskih funkcija nekih posebnih kutova navedene su u tablici 3.

Tablica 2

VEZE IZMEĐU TRIGONOMETRIJSKIH FUNKCIJA ISTOGA KUTA

Funkcija kuta α	*izražena funkcijom*			
	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\tan\alpha$	$\cot\alpha$
$\sin\alpha$		$\pm\sqrt{1-\cos^2\alpha}$	$\pm\dfrac{\tan\alpha}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}}$	$\pm\dfrac{1}{\sqrt{1+\cot^2\alpha}}$
$\cos\alpha$	$\pm\sqrt{1-\sin^2\alpha}$		$\pm\dfrac{1}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}}$	$\pm\dfrac{\cot\alpha}{\sqrt{1+\cot^2\alpha}}$
$\tan\alpha$	$\pm\dfrac{\sin\alpha}{\sqrt{1-\sin^2\alpha}}$	$\pm\dfrac{\sqrt{1-\cos^2\alpha}}{\cos\alpha}$		$\dfrac{1}{\cot\alpha}$
$\cot\alpha$	$\pm\dfrac{\sqrt{1-\sin^2\alpha}}{\sin\alpha}$	$\pm\dfrac{\cos\alpha}{\sqrt{1+\cos^2\alpha}}$	$\dfrac{1}{\tan\alpha}$	

Trigonometrijske funkcije su periodične. Temeljni period funkcija sinus i kosinus je 2π, pa vrijedi

$$\sin(\alpha+2k\pi)=\sin\alpha, \quad \cos(\alpha+2k\pi)=\cos\alpha. \tag{10}$$

Temeljni period funkcija tangens i kotangens je π, pa vrijedi

$$\tan(\alpha+k\pi)=\tan\alpha, \quad \cot(\alpha+k\pi)=\cot\alpha. \tag{11}$$

Trigonometrijske funkcije sinus, kosinus, tangens i kotangens grafički su prikazane na slici 2 i slici 3. Približne vrijednosti trigonometrijskih funkcija pojedinih kutova mogu se očitati ili izračunati interpolacijom iz tablica tih funkcija koje se nalaze u matematičkim priručnicima, a u novije vrijeme i primjenom džepnih kalkulatora i računala.

Tablica 3

VRIJEDNOSTI TRIGONOMETRIJSKIH FUNKCIJA NEKIH POSEBNIH KUTOVA

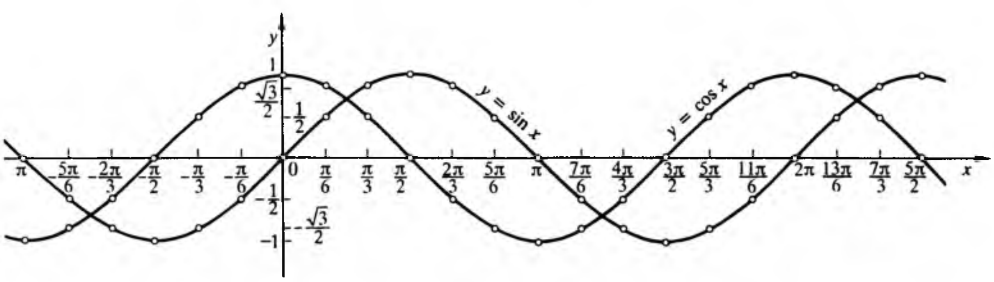
Vrijednost kuta α	*Vrijednost funkcije*				
	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\tan\alpha$	$\cot\alpha$	
0°	0	1	0	∞	90°
15°	$\frac{1}{4}(\sqrt{6}-\sqrt{2})$	$\frac{1}{4}(\sqrt{6}+\sqrt{2})$	$2-\sqrt{3}$	$2+\sqrt{3}$	75°
18°	$\frac{1}{4}(\sqrt{5}-1)$	$\frac{1}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}$	$\frac{1}{5}\sqrt{25-10\sqrt{5}}$	$\sqrt{5+2\sqrt{5}}$	72°
22°30′	$\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}$	$\sqrt{2}-1$	$\sqrt{2}+1$	67°30′
30°	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$	60°
36°	$\frac{1}{2}\sqrt{10-2\sqrt{5}}$	$\frac{1}{4}(\sqrt{5}+1)$	$\sqrt{5-2\sqrt{5}}$	$\frac{1}{5}\sqrt{25+10\sqrt{5}}$	54°
45°	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1	45°
180°	0	−1	0	∞	270°
	$\cos\beta$	$\sin\beta$	$\cot\beta$	$\tan\beta$	*Vrijednost kuta* β
	Vrijednost funkcije				

Sinus je neparna, a kosinus parna funkcija, pa vrijedi

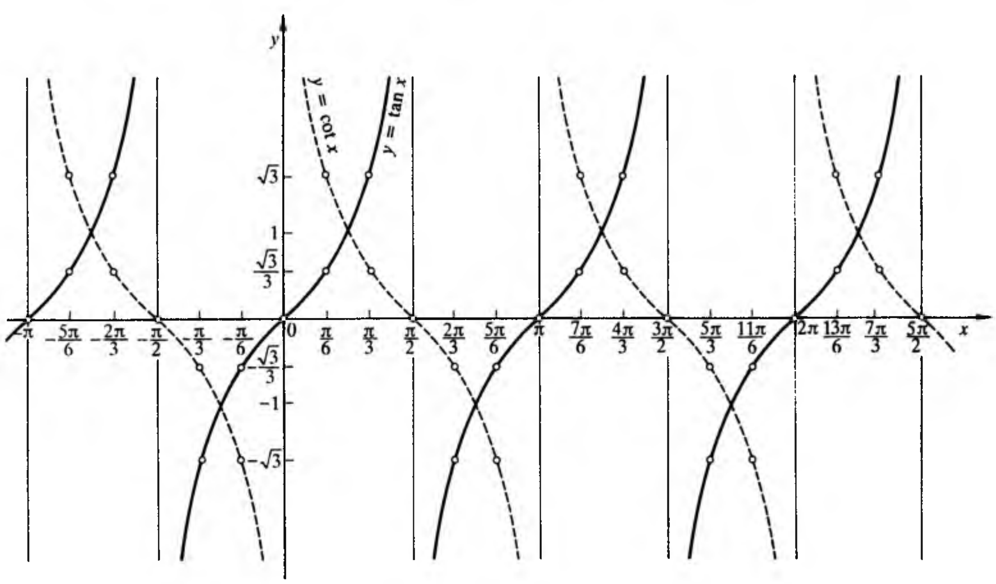
$$\sin(-\alpha)=-\sin\alpha, \quad \cos(-\alpha)=\cos\alpha. \tag{12}$$

Posljedica je tih jednakosti

$$\tan(-\alpha)=\frac{\sin(-\alpha)}{\cos(-\alpha)}=-\tan\alpha, \quad \cot(-\alpha)=-\cot\alpha. \tag{13}$$



Sl. 2. Grafički prikaz sinusne i kosinusne funkcije



Sl. 3. Grafički prikaz tangensne i kotangensne funkcije

Za trigonometrijske funkcije vrijede tzv. *adicijski teoremi*, a to su:

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta, \tag{14}$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta, \tag{15}$$

$$\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan\alpha \pm \tan\beta}{1 \mp \tan\alpha\tan\beta}, \tag{16}$$

$$\cot(\alpha \pm \beta) = \frac{\cot\alpha\cot\beta \mp 1}{\cot\beta \pm \cot\alpha}. \tag{17}$$

Za pribrajanje kuta α kutu $\pi/2$, odnosno kutu π, posebno vrijede formule:

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} \mp \alpha\right) = \cos\alpha, \quad \cos\left(\frac{\pi}{2} \mp \alpha\right) = \pm\sin\alpha, \tag{18}$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} \mp \alpha\right) = \pm\cot\alpha, \quad \cot\left(\frac{\pi}{2} \mp \alpha\right) = \pm\tan\alpha, \tag{19}$$

$$\sin(\pi \pm \alpha) = \mp\sin\alpha, \quad \cos(\pi \pm \alpha) = -\cos\alpha, \tag{20}$$

$$\tan(\pi \pm \alpha) = \pm\tan\alpha, \quad \cot(\pi \pm \alpha) = \pm\cot\alpha. \tag{21}$$

Iz adicijskih se teorema mogu izvesti i razne druge, za preračunavanje korisne, relacije:

$$\begin{gathered}
\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha,\\
\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1,\\
\tan 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1-\tan\alpha}, \quad \cot 2\alpha = \frac{\cot^2\alpha - 1}{2\cot\alpha},\\
\sin 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1+\tan^2\alpha}, \quad \cos 2\alpha = \frac{1-\tan^2\alpha}{1+\tan^2\alpha}.
\end{gathered} \tag{22}$$

$$\begin{gathered}
\sin\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}, \quad \cos\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}},\\
\tan\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}, \quad \cot\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}},
\end{gathered} \tag{23}$$

$$\sin\alpha \pm \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha\pm\beta}{2}\cos\frac{\alpha\mp\beta}{2}, \tag{24a}$$

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}, \tag{24b}$$

$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}, \tag{24c}$$

$$\tan\alpha \pm \tan\beta = \frac{\sin(\alpha\pm\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}, \tag{25a}$$

$$\cot\alpha \pm \cot\beta = \frac{\sin(\beta\pm\alpha)}{\sin\alpha\sin\beta}. \tag{25b}$$

Trigonometrijski odnosi u ravninskom trokutu. U trokutu ABC duljine su stranica a, b, c, mjere suprotnih kutova su α, β, γ, a r je polumjer opisane kružnice (sl. 4 a). Niz relacija povezuje te veličine i vrijednosti trigonometrijskih funkcija kutova tog trokuta:

sinusni poučak:

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2r, \tag{26}$$

kosinusni poučak:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma \tag{27}$$

i još dvije analogne formule za a^2, odnosno b^2, ili eksplicitno

$$\cos\gamma = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}, \tag{28}$$

tangensni poučak:

$$\frac{\tan\frac{\beta-\gamma}{2}}{\tan\frac{\beta+\gamma}{2}} = \frac{b-c}{b+c} \tag{29}$$

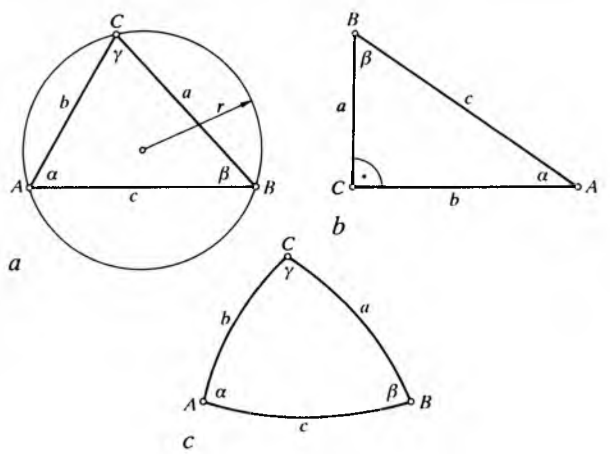
i *heronovske formule*, koje izražavaju vrijednosti trigonometrijskih funkcija kutova trokuta pomoću duljina njegovih stranica, na primjer

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}}, \tag{30a}$$

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}}, \tag{30b}$$

$$\tan\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}}, \tag{30c}$$

gdje je poluopseg tog trokuta $s = 1/2\,(a+b+c)$. Sve te relacije omogućuju da se iz zadanih elemenata trokuta (duljina stranicâ i mjera kutova) izračunaju ostali njegovi elementi.



Sl. 4. Označivanje elemenata općenitog (a), pravokutnog (b) i sfernog (c) trokuta

Za pravokutni trokut ($\gamma = 90°$; sl. 4 b) vrijedi

$$\sin\alpha = \frac{a}{c}, \quad \cos\alpha = \frac{b}{c}, \quad \tan\alpha = \frac{a}{b}, \tag{31a}$$

$$\sin\beta = \frac{b}{c}, \quad \cos\beta = \frac{a}{c}, \quad \tan\beta = \frac{b}{a}. \tag{31b}$$

Trigonometrijski odnosi u sfernom trokutu. U sfernom trokutu ABC kutne mjere stranica jesu a, b i c te suprotnih kutova α, β i γ (sl. 4 c). Taj je sferni trokut određen s po tri od tih šest podataka, pa bilo koja četiri od njih moraju biti vezana nekom relacijom. Takvih je relacija ukupno petnaest, a izražavaju se u četiri poučka za sferni trokut.

Sinusni poučak povezuje po dva para suprotnih stranica i kutova, a sve tri takve relacije mogu se zajedno pisati kao

$$\frac{\sin a}{\sin\alpha} = \frac{\sin b}{\sin\beta} = \frac{\sin c}{\sin\gamma}. \tag{32}$$

Kosinusni poučak povezuje sve tri stranice i po jedan kut, a sastoji se od tri analogne formule, od kojih je jedna

$$\cos a = \cos b\cos c + \sin b\sin c\cos\alpha. \tag{33}$$

Dvojni (dualni) kosinusni poučak povezuje sva tri kuta i po jednu stranicu, a sastoji se od triju relacija, od kojih je jedna

$$\cos\alpha = -\cos\beta\cos\gamma + \sin\beta\sin\gamma\cos a. \tag{34}$$

Kotangensni poučak povezuje po dvije stranice i dva kuta, pri čemu dolazi samo po jedan par suprotnih elemenata. Sastoji se od šest formula, od kojih je jedna

$$\frac{\cot a}{\sin\gamma}-\frac{\cot\alpha}{\sin b}=\cot b\cot\beta, \tag{35}$$

a ostale se dobivaju zamjenama slova a, b, c i odgovarajućim zamjenama slova α, β, γ.

Osim tih osnovnih postoje i drugi, za preračunavanje korisni, poučci i relacije:

tangensni poučak:

$$\frac{\tan\frac{a-b}{2}}{\tan\frac{a+b}{2}}=\frac{\tan\frac{\alpha-\beta}{2}}{\tan\frac{\alpha+\beta}{2}},\ \text{itd.}, \tag{36}$$

D'Alembertove formule:

$$\begin{gathered}\frac{\sin\frac{\alpha+\beta}{2}}{\cos\frac{\gamma}{2}}=\frac{\cos\frac{a-b}{2}}{\cos\frac{c}{2}},\quad \frac{\sin\frac{\alpha-\beta}{2}}{\cos\frac{\gamma}{2}}=\frac{\sin\frac{a-b}{2}}{\sin\frac{c}{2}},\\ \frac{\cos\frac{\alpha+\beta}{2}}{\sin\frac{\gamma}{2}}=\frac{\cos\frac{a+b}{2}}{\cos\frac{c}{2}},\quad \frac{\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}{\sin\frac{\gamma}{2}}=\frac{\sin\frac{a+b}{2}}{\sin\frac{c}{2}},\ \text{itd.},\end{gathered} \tag{37}$$

Napierove formule:

$$\tan\frac{\alpha+\beta}{2}\tan\frac{\gamma}{2}=\frac{\cos\frac{a-b}{2}}{\cos\frac{a+b}{2}}, \tag{38 a}$$

$$\tan\frac{\alpha-\beta}{2}\tan\frac{\gamma}{2}=\frac{\sin\frac{a-b}{2}}{\sin\frac{a+b}{2}}, \tag{38 b}$$

$$\tan\frac{a+b}{2}\cot\frac{c}{2}=\frac{\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}{\cos\frac{\alpha+\beta}{2}}, \tag{38 c}$$

$$\tan\frac{a-b}{2}\cot\frac{c}{2}=\frac{\sin\frac{\alpha-\beta}{2}}{\sin\frac{\alpha+\beta}{2}},\ \text{itd.}, \tag{38 d}$$

Heronovske formule:

$$\sin\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{\sin(s-b)\sin(s-c)}{\sin b\sin c}}, \tag{39 a}$$

$$\cos\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{\sin s\sin(s-a)}{\sin b\sin c}}, \tag{39 b}$$

$$\tan\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{\sin(s-b)\sin(s-c)}{\sin s\sin(s-a)}},\ \text{itd.}, \tag{39 c}$$

gdje je $s=1/2\,(a+b+c)$ poluopseg trokuta,

dvojne (dualne) Heronovske formule:

$$\sin\frac{a}{2}=\sqrt{\frac{-\cos\sigma\cos(\sigma-\alpha)}{\sin\beta\sin\gamma}}, \tag{40 a}$$

$$\cos\frac{a}{2}=\sqrt{\frac{\cos(\sigma-\beta)\cos(\sigma-\gamma)}{\sin\beta\sin\gamma}}, \tag{40 b}$$

$$\tan\frac{a}{2}=\sqrt{\frac{-\cos\sigma\cos(\sigma-\alpha)}{\cos(\sigma-\beta)\cos(\sigma-\gamma)}},\ \text{itd.}, \tag{40 c}$$

gdje je $\sigma=1/2\,(\alpha+\beta+\gamma)$ poluzbroj kutova trokuta.

Za sferne polumjere opisane i upisane kružnice (r, odnosno ρ) promatranog trokuta vrijede relacije:

$$\cot r=\sqrt{\frac{\sin s\sin(s-a)\sin(s-b)\sin(s-c)}{2\sin\frac{a}{2}\sin\frac{b}{2}\sin\frac{c}{2}}}=\sqrt{\frac{\cos(\sigma-\alpha)\cos(\sigma-\beta)\cos(\sigma-\gamma)}{-\cos\sigma}}, \tag{41}$$

$$\tan\rho=\sqrt{\frac{\sin(s-a)\sin(s-b)\sin(s-c)}{\sin s}}=\sqrt{\frac{-\cos\sigma\cos(\sigma-\alpha)\cos(\sigma-\beta)\cos(\sigma-\gamma)}{2\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}}}. \tag{42}$$

Za *sferni eksces* trokuta $\varepsilon=\alpha+\beta+\gamma-2\pi$ vrijedi *L'Huilierova formula:*

$$\tan\frac{\varepsilon}{4}=\sqrt{\tan\frac{s}{2}\tan\frac{s-a}{2}\tan\frac{s-b}{2}\tan\frac{s-c}{2}} \tag{43}$$

i tri formule, na primjer

$$\tan\frac{\varepsilon}{2}=\frac{\tan\frac{a}{2}\tan\frac{b}{2}\sin\gamma}{1+\tan\frac{a}{2}\tan\frac{b}{2}\cos\gamma}\quad\text{itd.} \tag{44}$$

Legendreov poučak glasi: sferni trokut kojemu su stranice vrlo male s obzirom na polumjer sfere može se dobro aproksimirati ravninskim trokutom jednakih stranica i površine, te kutovima, koji su od odgovarajućih kutova sfernog trokuta manji za po trećinu sfernog ekscesa tog trokuta.

U pravokutnom sfernom trokutu s pravim kutom γ, za pet elemenata (a, b, c, α, β) postoji ukupno deset osnovnih relacija koje uključuju po tri elementa:

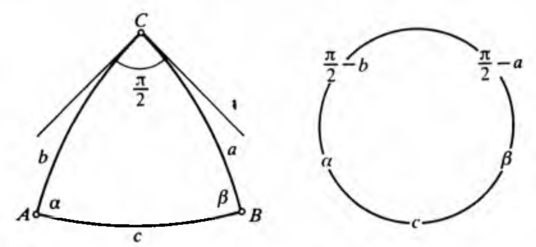
Pitagorin poučak za pravokutni sferni trokut

$$\cos c=\cos a\cos b, \tag{45}$$

zatim

$$\begin{gathered}\sin a=\sin c\sin\alpha,\quad \sin b=\sin c\sin\beta,\\ \tan a=\tan c\cos\beta,\quad \tan b=\tan c\cos\alpha,\\ \tan a=\sin b\tan\alpha,\quad \tan b=\sin a\tan\beta,\\ \cos\alpha=\cos a\sin\beta,\quad \cos\beta=\cos b\sin\alpha,\\ \cos c=\cot\alpha\cot\beta.\end{gathered} \tag{46}$$

Svih se tih deset relacija može izreći u obliku *Napierova pravila*: ako su pet elemenata pravokutnog sfernog trokuta (pravi kut se ispušta) kružno raspoređeni redoslijedom kako se nalaze u trokutu (sl. 5), pri čemu su katete a i b zamijenjene dopunama do $\pi/2$, tada je kosinus svakog od elemenata jednak umnošku ko-



a *b*

Sl. 5. Pravokutni sferni trokut (*a*) i kružni raspored njegovih elemenata (*b*) tangensa od dvaju njemu susjednih elemenata ili umnošku sinusa od dvaju preostalih elemenata, na primjer

$$\cos\alpha = \cot\left(\frac{\pi}{2} - b\right)\cdot\cot c \tag{47}$$

ili

$$\cos\alpha = \sin\left(\frac{\pi}{2} - a\right)\cdot\sin\beta. \tag{48}$$

U pravokutnom sfernom trokutu relacija za $\tan \varepsilon/2$ poprima vrlo jednostavan oblik:

$$\tan\frac{\varepsilon}{2} = \tan\frac{a}{2}\tan\frac{b}{2}. \tag{49}$$

Sve navedene relacije služe za računanje s trigonometrijskim funkcijama, bez obzira na geometrijsko značenje funkcija.

V. Volenec

TRIGONOMETRIJSKA MREŽA, skup međusobno umreženih i stabiliziranih točaka na Zemljinoj površini s određenim horizontalnim i visinskim položajem u jedinstvenom koordinatnom sustavu. Točke se raspoređuju po terenu prema unaprijed sastavljenom projektu, a služe kao oslonac za izmjeru (premjer) tla (v. *Geodetska izmjera zemljišta*, TE 6, str. 22) i potom za dobivanje topografsko-katastarskih planova i karata različita mjerila, te kao koordinatni sustav za ostvarivanje mnogih inženjerskih radova na terenu i za razne znanstvene potrebe (određivanje oblika, izmjera i fizikalnih svojstava Zemlje).

Nezamjenjivu ulogu u razvoju geodezije i ostalih geoznanosti ima uspostavljanje i osuvremenjivanje *osnovnih geodetskih mreža*, koje su temelj za izvođenje ostalih geodetskih radova, bilo za praktične ili znanstvene namjene. Osnovnim geodetskim radovima prikupljaju se temeljni podatci o položaju i visini točaka geodetskih mreža i temeljni podatci o geofizičkim, odnosno geodinamičkim poljima. Geofizička su polja npr. polje ubrzanja sile teže, geomagnetna polja i sl., a u geodinamička se polja ubrajaju polja sila koje uzrokuju pomake Zemljina tla (npr. pomake tektonskih ploča). To su osnovne geodetske baze, tj. skupina geodetskih mreža i točaka definiranih u *astronomsko-geodetskoj mreži*, *trigonometrijskoj mreži*, *mreži preciznog nivelmana* i *nivelmana velike točnosti*, te *osnovnoj gravimetrijskoj mreži*.

U suvremenoj se geodeziji te mreže ujedinjuju, tj. sve se mjerne veličine (duljine, kutovi, pravci, azimuti, visinske razlike, koordinatne razlike, razlike ubrzanja sile teže i njihove derivacije) zajednički obrađuju, pa je tako nastao novi pojam *integrirana geodezija*.

Primjenom suvremenih satelitskih metoda za uspostavljanje geodetskih mreža i mjerenjem apsolutnih ubrzanja sile teže podatci o geodetskim točkama često se dobivaju samostalno (odvojeno), te je u budućnosti realnije govoriti o polju točaka nego o mreži izravno povezanih točaka.

Trigonometrijske mreže rasprostranjene po cijelom teritoriju države osnovne su državne položajne mreže. One omogućuju ujedinjenje geodetskih radova različitih mjerila, izvedenih u različito vrijeme i na različitom mjestu. U novije je doba istodobnom primjenom kinematičkih globalnih pozicijskih sustava (satelitsko određivanje položaja) i aerofotogrametrije moguće paralelno stvarati mreže i snimati detalje.

Razvijanje trigonometrijskih mreža sastoji se od terenskih radova te obradbe i interpretacije rezultata terenskih mjerenja. Terenski se dio rada sastoji u organizaciji i izvođenju astronomsko-geodetskih mjerenja. U posljednje doba tu pripada i prikupljanje baze podataka izravno na terenu. Obradba i interpretacija rezultata obuhvaća redukciju obavljenih mjerenja na prihvaćenu referentnu plohu, matematičku obradbu rezultata mjerenja, njihovu sistematizaciju i grafičko prikazivanje, te stvaranje izlaznih podataka.

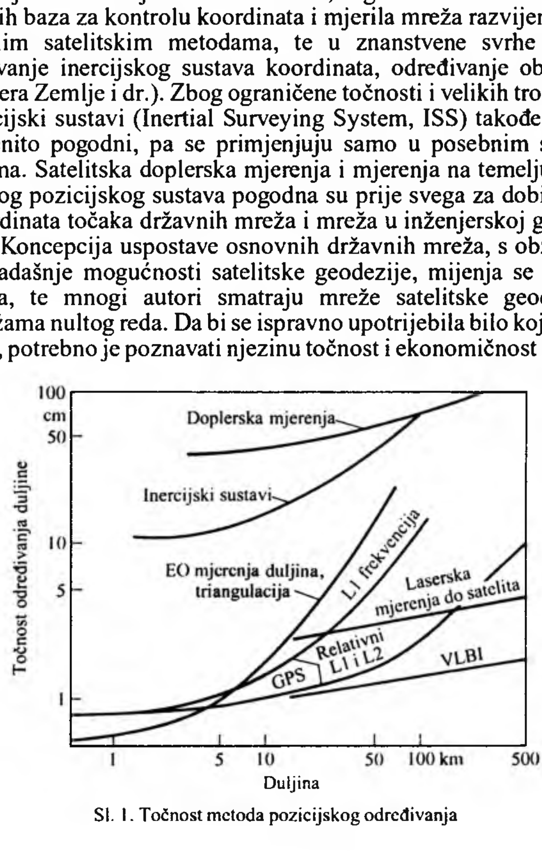
Trigonometrijske se mreže uspostavljaju terestričkim i satelitskim metodama, odnosno pomoću klasične i pomoću satelitske triangulacije, trilateracije i poligonometrije. Sve do 1970. trigonometrijske mreže velike točnosti razvijane su samo klasičnim terestričkim mjerenjima. Već sedamdesetih godina satelitske su metode dostigle razinu točnosti najtočnijih terestričkih metoda s relativnom pogreškom stranice $1 \cdot 10^{-6}$. To je vrijedilo samo za udaljenosti od 200···4000 km. Jedna takva mreža ostvarena je na osnovi fotografskog određivanja pravaca prema satelitu PAGEOS. Dalje povećanje točnosti za regionalnu upotrebu nije bilo moguće, pa ta metoda satelitske geodezije nema danas praktičnog značenja.

Osjetno povećanje točnosti u satelitskoj geodeziji ostvareno je laserskim mjerenjima udaljenosti do umjetnih Zemljinih satelita. Instrumentima Satellite-Laser-Ranging treće generacije i prikladnim reflektorima na satelitima (satelit LAGEOS) može se odrediti udaljenost od stajališta na Zemlji do satelita s točnošću od 1···3 cm. Istodobnim opažanjem istog satelita s najmanje četiriju terestričkih stajališta može se ostvariti trigonometrijska mreža velike točnosti. U praksi je to teško ostvarivo zbog visoke cijene instrumentarija i zbog meteoroloških okolnosti koje ometaju istodobna opažanja. Ta se mjerenja primjenjuju u tektonski aktivnim područjima u okviru određenih geodinamičkih programa radi određivanja udaljenosti i promjena udaljenosti između stajališta na tektonskim pločama. Zbog već navedenih razloga u bliskoj se budućnosti ne očekuje uporaba laserskih mjerenja u operativnim geodetskim zadatcima.

U razdoblju od 1970. do 1980. godine snažan je razvoj doživjelo doplersko mjerenje, koje od tog doba postaje osnovna metoda satelitske geodezije. Sa sustavom NNSS (engl. Navy Navigation Satellite System), prikladnom mjernom opremom i računalnim programima mogu se dobiti koordinate s točnošću od ±0,2···±0,3 m. Tek na udaljenostima stajališta većim od 100 km doplerske točke mogu sačinjavati osnovu regionalnih geodetskih mreža.

Već se primjenjuje, a pogotovo će se u budućnosti primjenjivati globalni pozicijski sustav (GPS), koji i na kratkim udaljenostima daje točnost jednaku točnosti sadašnjih klasičnih terestričkih metoda. Ta metoda ne zahtijeva dogledanje stajališta, dakle ni podizanje skupih signala, pa se već danas ubraja među najekonomičnije precizne metode.

Laserska mjerenja i radiointerferometrija (metoda VLBI, engl. Very Long Baseline Interferometry) daju gotovo jednaku točnost, ali se, zbog velikih troškova i problema transporta, ne upotrebljavaju za stvaranje osnovnih mreža, nego samo za određivanje točnih baza za kontrolu koordinata i mjerila mreža razvijenih po ostalim satelitskim metodama, te u znanstvene svrhe (utočnjavanje inercijskog sustava koordinata, određivanje oblika i izmjera Zemlje i dr.). Zbog ograničene točnosti i velikih troškova inercijski sustavi (Inertial Surveying System, ISS) također nisu općenito pogodni, pa se primjenjuju samo u posebnim slučajevima. Satelitska doplerska mjerenja i mjerenja na temelju globalnog pozicijskog sustava pogodna su prije svega za dobivanje koordinata točaka državnih mreža i mreža u inženjerskoj geodeziji. Koncepcija uspostave osnovnih državnih mreža, s obzirom na sadašnje mogućnosti satelitske geodezije, mijenja se iz temelja, te mnogi autori smatraju mreže satelitske geodezije mrežama nultog reda. Da bi se ispravno upotrijebila bilo koja metoda, potrebno je poznavati njezinu točnost i ekonomičnost (sl. 1)



Sl. 1. Točnost metoda pozicijskog određivanja