LIT.: *F. Harders, S. Kienow*, Feuerfestkunde, Herstellung, Eigenschaften und Verwendung feuerfester Baustoffe. Springer-Verlag, Berlin–Göttingen–Heidelberg 1960. – *W. Hinz*, Silikate, Band 2. VEB Verlag für Bauwesen, Berlin 1971. – Feuerfeste Wekstoffe und ihre Merkmale. DIDIER Werke AG, Wiesbaden 1981. – *H. D. Leigh*, Refractories, *W. C. Miller*, Fibers, *F. Rointari*, Refractory Coatings, u djelu: Kirk-Othmer Encyclopedia of Chemical Technology, Vol. 20. John Wiley & Sons, New York–Chichester–Brisbane–Toronto–Singapore 1982. – *H. W. Hennicke, S. Kienow*, Keramik, u djelu: *K. Winnacker, L. Küchler*, Chemische Technologie II. Carl Hanser Verlag, München–Wien 1983. – *H. Salmang, H. Scholze*, Keramik, Teil 2, Keramische Werkstoffe. Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg–New York–Tokyo 1983. – *W. Trier*, Glasschmelzöfen. Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg–New York –Tokyo 1984. – PRE (Fédération Européenne des Fabricants de Produits Réfractaires), Refractory Materials, Recommendations, Zürich 1985. – *F. Vollertsen, S. Vogler*, Werkstoffeigenschaften und Mikrostruktur. Carl Hanser Verlag, München –Wien 1989. – *H. A. Schaeffer*, Feuerfeste Materialien, u djelu: Allgemeine Technologie des Glases. Universität Erlangen, 1990. – *W. Schulle*, Feuerfeste Werkstoffe, Feuerfestkeramik, Prüftechnische Beurteilung, Werkstofftypen. Deutscher Verlag für Grundstoffindustrie, Leipzig 1990.

R. Laslo

VEKTORI, MATRICE I TENZORI, osnovni pojmovi dijela matematike koji se danas naziva *linearna algebra*. Linearna algebra je u matematičkoj podjeli dio *algebre* (v. *Aritmetika i algebra*, TE 1, str. 371), grana matematike koja se bavi proučavanjem vektorskih prostora, matrica, linearnih sustava, linearnih, bilinearnih i multilinearnih preslikavanja. Uz *matematičku analizu*, linearna algebra čini osnovu tzv. više matematike. Razvojem novih numeričkih postupaka i posebice razvojem računalnih znanosti linearna algebra postaje sve važniji dio matematike.

Začetci se linearne algebre susreću pri rješavanju sustava linearnih jednadžbi u problemima koji su postavljeni još u staroegipatskoj matematici.

Gaussova metoda rješavanja linearnih sustava dobila je ime pošto ju je C. F. Gauss (1777–1855) opisao u članku u kojem je prikazao računanje orbite asteroida Pallasa, iako je ta metoda upotrebljavana i mnogo ranije. Nadopunu Gaussova postupka opisao je 1888. godine W. Jordan, rješavajući simetrični sustav jednadžbi u primjenama u geodeziji.

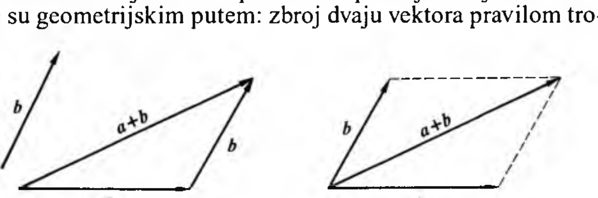
Naziv *matrica* prvi je put u matematičkoj literaturi spomenut 1850. u članku J. J. Silvestera. Matrično množenje prvi je (implicitno) upotrijebio Gauss 1801. godine u radu *Disquisitiones Arithmeticae* pri proučavanju kvadratnih formi. Inverzna se matrica prvi put spominje 1858. u članku *A Memoir on the Theory of Matrices* A. Cayleya, u kojem je on opisao osnovna svojstva matrica, povezujući ih sa sustavom linearnih jednadžbi. Pojam *ranga matrice* uveo je G. Frobenius 1879. preko minora matrice.

Cramerovo pravilo za rješavanje linearnih sustava navedeno je 1750. u radu G. Cramera, u kojem je on rješavao problem nalaženja ravninske krivulje koja prolazi zadanim skupom točaka. Za sustave reda 2 i 3 iste se formule nalaze u radovima C. Maclaurina objavljenim posmrtno 1848. godine. Svojstva determinanata utvrdili su između ostalih E. Bezout (1739–1784), A. T. Vandermonde (1735–1796) i P. S. Laplace (1749–1827). Samo ime, notaciju, pojam minore i razvoj po retcima ili stupcima dao je A. L. Cauchy 1812. godine.

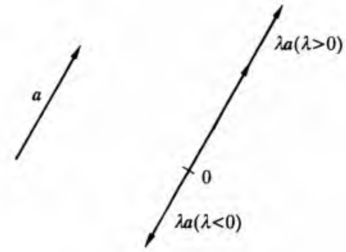
Osnovu za skalarni i vektorski umnožak i pojam vektora postavio je W. R. Hamilton otkrićem kvaterniona 1843. godine, no u današnjem obliku prvi ih je upotrijebio J. W. Gibbs 1901. godine. Osnovne ideje n-dimenzijskog vektorskog prostora, linearne zavisnosti i nezavisnosti, potprostora i baze nalazimo 1862. u radu H. Grassmana *Ausdehnungslehre*. Apstraktnu definiciju vektorskog prostora prvi je dao G. Peanno 1888. godine, kada je uveo i pojam dimenzije. Njegov je rad bio skoro zaboravljen, da bi se isti sustav aksioma pojavio 1918. u knjizi Space–Time–Matter H. Weyla. U istom je radu dana i suvremena definicija linearnog operatora.

KLASIČNA ALGEBRA VEKTORA

Prostor V^3. Skup vektora u trodimenzijskom prostoru naziva se klasičnim vektorskim prostorom i označuje se s V^3. Pod klasičnim vektorom podrazumijeva se dužina kojoj je propisan smjer i orijentacija (strelica!), s time da početna točka vektora može biti bilo koja točka u prostoru. Operacije na njemu definirane su geometrijskim putem: zbroj dvaju vektora pravilom trokuta ili paralelograma (sl. 1), a umnožak skalara i vektora na prirodan način (sl. 2).



Sl. 1. Zbrajanje vektora, pravilo trokuta i pravilo paralelograma



Sl. 2. Množenje vektora skalarom

Neka je $Oxyz$ pravokutni Kartezijev koordinatni sustav u prostoru (v. *Analitička geometrija*, TE 1, str. 275), a $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ jedinični vektori u smjeru koordinatnih osi, tzv. *koordinatni vektori*. Tada se svaki vektor $\boldsymbol{a}$ iz V^3 može na jedinstveni način prikazati u obliku

$$\boldsymbol{a} = a_x \boldsymbol{i} + a_y \boldsymbol{j} + a_z \boldsymbol{k}. \tag{1}$$

Time je vektor $\boldsymbol{a}$ rastavljen u komponente po ortogonalnoj bazi $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$. Komponente a_x, a_y, a_z projekcije su vektora $\boldsymbol{a}$ na koordinatne osi. Ako su α, β, γ kutovi što ih zatvara vektor $\boldsymbol{a}$ s koordinatnim osima te $|\boldsymbol{a}|$ duljina vektora, tada vrijedi

$$a_x = |\boldsymbol{a}|\cos\alpha, \quad a_y = |\boldsymbol{a}|\cos\beta, \quad a_z = |\boldsymbol{a}|\cos\gamma, \tag{2}$$

s tim, da je uvijek

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1. \tag{3}$$

Operacije zbrajanja vektorâ i množenja vektora skalarom mogu se opisati pomoću njihovih komponenata:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} &= (a_x + b_x)\boldsymbol{i} + (a_y + b_y)\boldsymbol{j} + (a_z + b_z)\boldsymbol{k}, \\ \lambda \boldsymbol{a} &= (\lambda a_x)\boldsymbol{i} + (\lambda a_y)\boldsymbol{j} + (\lambda a_z)\boldsymbol{k}. \end{aligned} \tag{4}$$

Skalarni umnožak. Operacija *skalarnog umnoška* koja dvama vektorima pridružuje skalarnu veličinu definirana je u prostoru V^3 izrazom

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} := |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\varphi, \tag{5}$$

gdje je φ kut koji zatvaraju ti vektori. Taj umnožak ima sljedeća svojstva: $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{a} \geqq 0$ (pozitivnost), $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{a}$ (komutativnost), $(\lambda \boldsymbol{a}) \cdot \boldsymbol{b} = \lambda(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b})$ (homogenost) te $\boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}) = \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} + \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c}$ (distributivnost).

Kako su koordinatni vektori međusobno okomiti i jedinične duljine, vrijedi $\boldsymbol{i} \cdot \boldsymbol{i} = \boldsymbol{j} \cdot \boldsymbol{j} = \boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{k} = 1$, $\boldsymbol{i} \cdot \boldsymbol{j} = \boldsymbol{j} \cdot \boldsymbol{k} = \boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{i} = 0$. Zaključuje se da se skalarni umnožak može računati i pomoću izraza

$$\begin{aligned} \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} &= (a_x \boldsymbol{i} + a_y \boldsymbol{j} + a_z \boldsymbol{k}) \cdot (b_x \boldsymbol{i} + b_y \boldsymbol{j} + b_z \boldsymbol{k}) = \\ &= a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z. \end{aligned} \tag{6}$$

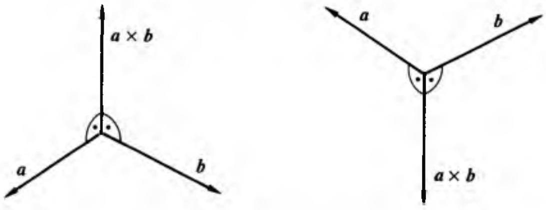
Duljina vektora je

$$|\boldsymbol{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}, \tag{7}$$

a kut među dvama vektorima

$$\cos\varphi = \frac{\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|} = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}\sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}}. \tag{8}$$

Vektorski umnožak. Dok se skalarni umnožak može jednostavno poopćiti i na druge vektorske prostore, *vektorski umnožak* karakterističan je za trodimenzijski prostor. To je preslikavanje, nazvano još vanjsko množenje, koje dvama vektorima $\boldsymbol{a}$ i $\boldsymbol{b}$ različitima od nule pridružuje treći vektor $\boldsymbol{c}$ sa sljedećim svojstvima: $|\boldsymbol{c}| = |\boldsymbol{a}|\,|\boldsymbol{b}|\,\sin\varphi$, okomit je na $\boldsymbol{a}$ i na $\boldsymbol{b}$, trojka $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ čini desni sustav (sl. 3). Ako je barem jedan od vektora jednak nuli, onda je i vektorski umnožak jednak nuli.



Sl. 3. Vektorski umnožak

Vektorski umnožak se zapisuje kao $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ (čita se "a eks b"). Osnovna su njegova svojstva $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=-\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}$ (antikomutativnost), $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=0$ ako i samo ako $\boldsymbol{a}$ i $\boldsymbol{b}$ imaju isti smjer, $(\lambda\boldsymbol{a})\times\boldsymbol{b}=\lambda(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})$ (homogenost), $\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}$ (distributivnost).

Po definiciji se dobiva sljedeća tablica vektorskog množenja jediničnih vektora:

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{i}=0, \quad \boldsymbol{j}\times\boldsymbol{j}=0, \quad \boldsymbol{k}\times\boldsymbol{k}=0,\\ &\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{j}=\boldsymbol{k}, \quad \boldsymbol{j}\times\boldsymbol{k}=\boldsymbol{i}, \quad \boldsymbol{k}\times\boldsymbol{i}=\boldsymbol{j}. \end{aligned} \tag{9}$$

Vektorski se umnožak iskazuje pomoću komponenata vektora:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b} &= (a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k})\times(b_x\boldsymbol{i}+b_y\boldsymbol{j}+b_z\boldsymbol{k}) = \\ &= (a_y b_z - a_z b_y)\boldsymbol{i} + (a_z b_x - a_x b_z)\boldsymbol{j} + (a_x b_y - a_y b_x)\boldsymbol{k} = \\ &= \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix}\boldsymbol{i} - \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix}\boldsymbol{j} + \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix}\boldsymbol{k} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}. \end{aligned} \tag{10}$$

Posljednja determinanta tek je simbolički zapis za vektor iz prethodna dva retka (v. *Aritmetika i algebra*, TE 1, str. 371).

Vektorski umnožak nije asocijativan. Složeniji izrazi s vektorskim umnošcima transformiraju se ovako:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}) &= (\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{b}-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\boldsymbol{c},\\ (\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c} &= (\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{b}-(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{a},\\ (\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{d}) &= (\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{d})-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{d})(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}). \end{aligned} \tag{11}$$

Mješoviti umnožak. Prirodna kombinacija skalarnog i vektorskog umnoška jest *mješoviti umnožak* triju vektora:

$$\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}) = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}. \tag{12}$$

Geometrijski, on je jednak obujmu paralelepipeda razapetog tim vektorima. Stoga, $\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})=0$ ako i samo ako su vektori $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ i $\boldsymbol{c}$ *komplanarni*, tj. paralelni s istom ravninom.

Mješoviti umnožak pri promjeni poretka svojih faktora može promijeniti samo predznak:

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}) = \boldsymbol{b}\cdot(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{c}\cdot(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}) = \\ &= -\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{b}) = -\boldsymbol{c}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}) = -\boldsymbol{b}\cdot(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}). \end{aligned} \tag{13}$$

Također je $\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})=(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}$. Stoga se mješoviti umnožak često piše bez naznake operacija, pazeći samo na poredak vektora; kao $[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}]$ ili čak kraće $(\boldsymbol{a}\boldsymbol{b}\boldsymbol{c})$.

Vektorska analiza. Elementarni račun s trodimenzijskim vektorima ima veliku važnost u jednostavnijem zapisivanju izraza diferencijalnog i integralnog računa funkcija više varijabli (v. *Diferencijalni račun*, TE 3, str. 288; v. *Integralni račun*, TE 6, str. 515). Pri tom je osobito važan diferencijalni operator zvan *nabla* ili *Hamiltonov operator*:

$$\nabla = \boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial x}+\boldsymbol{j}\frac{\partial}{\partial y}+\boldsymbol{k}\frac{\partial}{\partial z}, \tag{14}$$

koji ima sva svojstva i vektora i diferencijalnog operatora. Operator ∇ može djelovati na skalarne i na vektorske funkcije. Ako je $\varphi=\varphi(x,y,z)$ skalarna funkcija (naziva se još *skalarno polje*), tada se djelovanje $\nabla\varphi$ naziva *gradijent* polja φ:

$$\nabla\varphi = \operatorname{grad}\varphi := \frac{\partial\varphi}{\partial x}\boldsymbol{i}+\frac{\partial\varphi}{\partial y}\boldsymbol{j}+\frac{\partial\varphi}{\partial z}\boldsymbol{k}. \tag{15}$$

Gradijent skalarnog polja vektorsko je polje koje je usmjereno okomito na ekvipotencijalnu plohu $\varphi(x,y,z)=\text{konst.}$

Ako je $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}(x,y,z)=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k}$ vektorsko polje, tada nabla može djelovati na dvojak način. *Divergencija* vektorskog polja je skalarno polje $\operatorname{div}\boldsymbol{a}$ dobiveno skalarnim umnoškom:

$$\operatorname{div}\boldsymbol{a} = \nabla\cdot\boldsymbol{a} := \frac{\partial a_x}{\partial x}+\frac{\partial a_y}{\partial y}+\frac{\partial a_z}{\partial z}. \tag{16}$$

Rotacija vektorskog polja je vektorsko polje $\operatorname{rot}\boldsymbol{a}$ dobiveno vektorskim umnoškom:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot}\boldsymbol{a} = \nabla\times\boldsymbol{a} &:= \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix} = \\ &= \left(\frac{\partial a_z}{\partial y}-\frac{\partial a_y}{\partial z}\right)\boldsymbol{i}+\left(\frac{\partial a_x}{\partial z}-\frac{\partial a_z}{\partial x}\right)\boldsymbol{j}+\left(\frac{\partial a_y}{\partial x}-\frac{\partial a_x}{\partial y}\right)\boldsymbol{k}. \end{aligned} \tag{17}$$

Operator ∇ poštuje sva pravila diferencijalnog, ali i vektorskog računa. Primjeri su najvažnijih formula:

$$\begin{aligned} \operatorname{grad}(\varphi\psi) &= \psi\operatorname{grad}\varphi+\varphi\operatorname{grad}\psi,\\ \operatorname{div}(\varphi\boldsymbol{a}) &= \varphi\operatorname{div}\boldsymbol{a}+(\operatorname{grad}\varphi)\cdot\boldsymbol{a},\\ \operatorname{rot}(\varphi\boldsymbol{a}) &= \operatorname{grad}\varphi\times\boldsymbol{a}+\varphi\operatorname{rot}\boldsymbol{a},\\ \operatorname{div}(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}) &= (\operatorname{rot}\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}\cdot(\operatorname{rot}\boldsymbol{b}),\\ \operatorname{rot}(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}) &= (\boldsymbol{b}\cdot\nabla)\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}(\nabla\cdot\boldsymbol{a})+\boldsymbol{a}(\nabla\cdot\boldsymbol{b})-(\boldsymbol{a}\cdot\nabla)\boldsymbol{b},\\ \operatorname{grad}(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}) &= (\boldsymbol{a}\cdot\nabla)\boldsymbol{b}+(\boldsymbol{b}\cdot\nabla)\boldsymbol{a}+\boldsymbol{a}\times(\nabla\times\boldsymbol{b})+\boldsymbol{b}\times(\nabla\times\boldsymbol{a}),\\ \operatorname{div}\operatorname{rot}\boldsymbol{a} &= \nabla\cdot(\nabla\times\boldsymbol{a})=0,\\ \operatorname{rot}\operatorname{grad}\varphi &= \nabla\times(\nabla\varphi)=0. \end{aligned} \tag{18}$$

VEKTORSKI PROSTORI

Imajući na umu klasične vektore u V^3, operacije s njima i njihova svojstva, početkom XX. st. izgrađena je apstraktna, aksiomatski zasnovana *teorija vektorskih prostora*, koja pokriva i strukture koje se javljaju u drugim granama matematike, pa i izvan nje. One se od standardnog modela (u V^3) razlikuju po naravi objekata (tj. vektora; to sada mogu biti brojevi, funkcije, matrice itd.), definiciji osnovnih operacija (zbrajanja i množenja skalarom) i konačno dimenzijskim karakteristikama.

Definicija vektorskog prostora. *Vektorski* (ili *linearni*) *prostor* nad poljem skalara $\mathbf{K}$ uređena je trojka $(X,+,\cdot)$ nepraznog skupa X i dviju operacija, *zbrajanja vektora* $+:X\times X\to X$ i množenja vektora skalarom $\cdot:\mathbf{K}\times X\to X$. To znači da za svaka dva elementa $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\in X$ njihov zbroj $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ i umnožak $\lambda\cdot\boldsymbol{a}$ skalara $\lambda\in\mathbf{K}$ i elementa $\boldsymbol{a}\in X$ mora ležati u X. Pritom moraju biti ispunjeni sljedeći uvjeti:

1) komutativnost zbrajanja: za sve $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\in X$ vrijedi $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$,

2) asocijativnost zbrajanja: za sve $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}\in X$ vrijedi $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$,

3) postojanje neutralnog elementa: postoji *nul-vektor* $0\in X$ za koji vrijedi $\boldsymbol{a}+0=\boldsymbol{a}$, za svaki $\boldsymbol{a}\in X$,

4) postojanje suprotnog elementa: za svaki element $\boldsymbol{a}\in X$ postoji *suprotni* element $\boldsymbol{a}'\in X$ takav da vrijedi $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{a}'=0$,

5) svojstvo jedinice: za broj $1\in\mathbf{K}$ i svaki element $\boldsymbol{a}\in X$ vrijedi $1\cdot\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}$,

6) usklađenost množenja: za svaka dva skalara $\lambda,\mu\in\mathbf{K}$ i svaki element $\boldsymbol{a}\in X$ vrijedi $\lambda\cdot(\mu\cdot\boldsymbol{a})=(\lambda\mu)\cdot\boldsymbol{a}$, *7*) distributivnost s obzirom na zbrajanje u X: za svaki skalar $\lambda \in \mathbf{K}$ i svaka dva elementa $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in X$ vrijedi $\lambda \cdot (\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}) = \lambda \cdot \boldsymbol{a} + \lambda \cdot \boldsymbol{b}$,

8) distributivnost s obzirom na zbrajanje u $\mathbf{K}$: za svaka dva skalara $\lambda, \mu \in \mathbf{K}$ i svaki element $\boldsymbol{a} \in X$ vrijedi $(\lambda+\mu)\cdot \boldsymbol{a} = \lambda \cdot \boldsymbol{a} + \mu \cdot \boldsymbol{a}$.

Za polje skalara $\mathbf{K}$ najčešće se uzima polje realnih brojeva $\mathbf{R}$. Tada se X naziva *realnim vektorskim prostorom*. Ako je $\mathbf{K}$ polje kompleksnih brojeva $\mathbf{C}$, tada je to *kompleksni vektorski prostor*. Uz ta dva, u primjenama se javljaju i neka konačna polja, najčešće polje ostataka pri dijeljenju prostim brojem p.

Elementi vektorskog prostora su *vektori*, iako se taj naziv često izbjegava stoga što vektorski prostor mogu činiti i matrice, funkcije, brojevi i mnogi drugi objekti. Množenje skalara i vektora redovito se zapisuje bez znaka operacije, $\lambda \boldsymbol{a}$ umjesto $\lambda \cdot \boldsymbol{a}$.

Zahtjevi (*1*)$\cdots$(*4*) u definiciji vektorskog prostora zapravo znače da je skup X uz zbrajanje *komutativna (Abelova) grupa* (druge primjere grupa v. *Aritmetika i algebra*, TE 1, str. 371). Po svojstvima grupe, suprotni je element $\boldsymbol{a}'$ elementa $\boldsymbol{a}$ *jedinstven*. Piše se redovito $-\boldsymbol{a}$ umjesto $\boldsymbol{a}'$. Tako se uvodi *oduzimanje* u vektorskom prostoru X kao zbrajanje sa suprotnim elementom: $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b} := \boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}' = \boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{b})$. Zahtjevi (*5*)$\cdots$(*8*) obično se nazivaju *aksiomi vektorskog prostora*. Vrijedi $(-1)\boldsymbol{a} = -\boldsymbol{a}$, $-(-\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{a}$ itd. Umnožak skalara $0 \in \mathbf{K}$ i bilo kojeg elementa $\boldsymbol{a} \in X$ jest nul-element, $0\boldsymbol{a} = 0$.

Operacija množenja dvaju vektora općenito nije definirana. Međutim, u specijalnim prostorima bit će moguće definirati tzv. skalarni ili unutarnji umnožak dvaju vektora, dok klasični vektorski prostor poznaje i vektorski (vanjski) umnožak.

Operacija dijeljenja dvaju vektora nije definirana. U nekim je prostorima (vektorskim algebrama) zamjena za nju množenje inverznim elementom.

Zbog svojstva asocijativnosti mogu se izrazi oblika $\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2+\boldsymbol{a}_3$ pisati bez zagrada. Tako je definiran i zbroj od po volji (ali konačno) mnogo pribrojnika $\boldsymbol{a}_1+\ldots+\boldsymbol{a}_n$, te izraz oblika $\lambda_1\boldsymbol{a}_1+\ldots+\lambda_n\boldsymbol{a}_n$, koji se naziva *linearna kombinacija* elemenata $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n$.

Potprostori. Svaki podskup $W \subset X$ vektorskog prostora X, koji je i sam vektorski prostor uz operacije već definirane u X, naziva se *vektorskim potprostorom*. Da bi W bio potprostor od X, dovoljno je provjeriti vrijede li sljedeća dva uvjeta:

1) za svaka dva elementa $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in W$ vrijedi $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b} \in W$,

2) za svaki skalar $\lambda \in \mathbf{K}$ i svaki vektor $\boldsymbol{a} \in W$ vrijedi $\lambda \boldsymbol{a} \in W$.

Ta se dva uvjeta mogu ujediniti: $W \subset X$ je potprostor od X onda i samo onda ako za svaka dva skalara $\lambda, \mu \in \mathbf{K}$ i svaka dva vektora $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in W$ linearna kombinacija $\lambda \boldsymbol{a} + \mu \boldsymbol{b}$ leži u W.

Neka su $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n \in X$ bilo koji vektori. Najvažniji primjer potprostora je skup svih linearnih kombinacija tih elemenata; to je potprostor koji se označuje s $L(\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n) := \{\lambda_1\boldsymbol{a}_1+\ldots+\lambda_n\boldsymbol{a}_n : \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbf{K}\}$. Za potprostor $W \subset X$ kaže se da je *razapet* elementima $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ ako vrijedi $W = L(\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n)$.

Linearna nezavisnost, baza i dimenzija. Vektori $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ su *linearno zavisni* ako postoje skalari $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, od kojih barem jedan nije jednak nuli, takvi da vrijedi $\lambda_1\boldsymbol{a}_1+\ldots+\lambda_n\boldsymbol{a}_n = 0$. Inače su vektori linearno nezavisni. Tada linearna kombinacija može iščezavati samo na trivijalan način: $\lambda_1\boldsymbol{a}_1+\ldots+\lambda_n\boldsymbol{a}_n = 0 \Rightarrow \Rightarrow \lambda_1 = \ldots = \lambda_n = 0$.

Vektori $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ čine *bazu* vektorskog prostora X ako su linearno nezavisni i ako razapinju prostor X. Kako je tada $X = L(\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n)$, svaki se element prostora X može prikazati u obliku linearne kombinacije vektora baze, $\boldsymbol{a} = \alpha_1\boldsymbol{e}_1+\ldots+\alpha_n\boldsymbol{e}_n$. Zbog linearne nezavisnosti tih vektora, taj je prikaz jedinstven. Tako je svakom vektoru pridruženo n skalara $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ koji se nazivaju *koordinatama* vektora $\boldsymbol{a}$ u bazi $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$.

Koordinate vektora ovise o izboru baze. Promijeni li se baza, promijenit će se i koordinate. Baza vektorskog prostora nije jedinstvena, međutim broj vektora u bazi jest. Taj se broj naziva *dimenzijom* vektorskog prostora X. On je jednak najvećem broju linearno nezavisnih vektora u tom prostoru. Prostor je konačnodimenzijski ili beskonačnodimenzijski, već prema tome je li dimenzija konačan broj ili to nije.

Primjeri vektorskih prostora. *Prostor* V^3. Linearna zavisnost, odnosno nezavisnost imaju jasnu geometrijsku interpretaciju u prostoru V^3. Vektori $\boldsymbol{a}$ i $\lambda\boldsymbol{a}$ su linearno zavisni. Dva su vektora $\boldsymbol{a}$ i $\boldsymbol{b}$ linearno nezavisna ako i samo ako nisu kolinearna. Analogno, vektori $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ i $\boldsymbol{c}$ su linearno nezavisni ako i samo ako nisu *komplanarni*, tj. ako ne leže u istoj ravnini. Četiri vektora u prostoru V^3 uvijek su linearno zavisna; to pokazuje da je V^3 trodimenzijski prostor.

Prostor $\mathbf{R}^n$. To je prostor svih uređenih n-torki realnih brojeva:

$$\mathbf{R}^n = \{\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n) : x_1, \ldots, x_n \in \mathbf{R}\}, \tag{19}$$

s tim da su operacije definirane ovako:

$$\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y} := (x_1+y_1, \ldots, x_n+y_n), \tag{20a}$$

$$\lambda \boldsymbol{x} := (\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n). \tag{20b}$$

Kanonsku bazu u tom prostoru čine vektori:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{e}_1 &= (1,0,\ldots,0),\\ &\vdots\\ \boldsymbol{e}_n &= (0,0,\ldots,1). \end{aligned} \tag{21}$$

U toj je bazi $x = (x_1, \ldots, x_n) = x_1\boldsymbol{e}_1+\ldots+x_n\boldsymbol{e}_n$.

Prostor $\mathbf{R}^T$. To je prostor svih funkcija sa skupa T u skup $\mathbf{R}$. Zbrajanje i množenje definirano je ovako:

$$(f+g)(t) := f(t)+g(t), \tag{22a}$$

$$(\lambda f)(t) := \lambda f(t). \tag{22b}$$

Taj je prostor dimenzije n ako je T konačan skup s n elemenata, a beskonačnodimenzijski, ako je T beskonačan. Prostor $\mathscr{P}$ svih realnih polinoma u jednoj varijabli potprostor je prostora $\mathbf{R}^T$, gdje je $T = \mathbf{R}$. Prostor $\mathscr{P}_n$ svih polinoma stupnja $\leqq n$ vektorski je potprostor od $\mathscr{P}$ dimenzije $n+1$. Bazu u tom prostoru čine polinomi $x_0(t) = 1$, $x_1(t) = t, \ldots, x_n(t) = t^n$. Uz nju, često se primjenjuju baze koje čine *ortogonalni polinomi* poput Legendreovih, Laguerrovih, Čebiševljevih, Hermiteovih i sl.

Prostor $C[a,b]$ svih neprekinutih funkcija na intervalu $T = [a,b]$ jest vektorski prostor, potprostor od $\mathbf{R}^T$. Takav je i prostor $C^{(n)}[a,b]$ svih n-puta neprekinuto diferencijabilnih funkcija.

Ako je X vektorski prostor dimenzije n, tada *svakih n* linearno nezavisnih vektora čini bazu tog prostora. Međutim, $n+1$ po volji odabranih vektora linearno je zavisno.

UNITARNI I NORMIRANI PROSTORI

Skalarni umnožak i unitarni prostori. Skalarni umnožak na kompleksnom (ili na realnom) vektorskom prostoru X je funkcija $(\cdot|\cdot) : X \times X \to \mathbf{C}$ (ili $\mathbf{R}$) koja paru vektora $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in X$ pridružuje skalar $(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{y})$ sa sljedećim svojstvima:

1) pozitivnost, $(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{x}) \geqq 0$, $(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{x}) = 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{x} = 0$,

2) hermitičnost (simetričnost), $(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{y}) = \overline{(\boldsymbol{y}|\boldsymbol{x})}$,

3) homogenost, $\lambda(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{y}) = (\lambda \boldsymbol{x}|\boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{x}|\bar{\lambda} \boldsymbol{y})$,

4) distributivnost, $(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}|\boldsymbol{z}) = (\boldsymbol{x}|\boldsymbol{z})+(\boldsymbol{y}|\boldsymbol{z})$,

za svaki izbor $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \in X$ i $\lambda \in \mathbf{C}$ (ili $\mathbf{R}$). Crta nad brojem označava kompleksno-konjugirani broj.

Vektorski prostor na kojem je definiran skalarni umnožak zove se kompleksni (ili realni) *unitarni prostor*.

Neka je $(\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n)$ baza u konačnodimenzijskom unitarnom prostoru X. Svaki se vektor $\boldsymbol{x} \in X$ može prikazati kao linearna kombinacija vektora te baze:

$$\boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{e}_1+\ldots+x_n\boldsymbol{e}_n. \tag{23}$$

Osnovni je problem odrediti koordinate $x_1, \ldots, x_n$ u gornjem prikazu. Pomnoži li se relacija (23) skalarno s vektorom $\boldsymbol{e}_j$, slijedi

$$(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{e}_j) = x_1(\boldsymbol{e}_1|\boldsymbol{e}_j)+\ldots+x_n(\boldsymbol{e}_n|\boldsymbol{e}_j) = x_1\alpha_{1j}+\ldots+x_n\alpha_{nj}, \tag{24}$$

gdje je označeno $\alpha_{ij} = (\boldsymbol{e}_i|\boldsymbol{e}_j)$. Skalari $x_1, \ldots, x_n$ dobivaju se kao rješenje sustava:

$$\begin{aligned} \alpha_{11}x_1+\ldots+\alpha_{n1}x_n &= (\boldsymbol{x}|\boldsymbol{e}_1),\\ &\vdots\\ \alpha_{1n}x_1+\ldots+\alpha_{nn}x_n &= (\boldsymbol{x}|\boldsymbol{e}_n). \end{aligned} \tag{25}$$

Nalaženje rješenja tog sustava je za veliki n složen problem.

U unitarnom prostoru definiran je pojam ortogonalnosti (okomitosti). Vektori $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ su *ortogonalni* ako je $(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{y})=0$. Nul-vektor je ortogonalan na svaki vektor prostora i to je jedini vektor s tim svojstvom. Niz $(\boldsymbol{e}_k)$ je *ortogonalan* ako vrijedi $(\boldsymbol{e}_i|\boldsymbol{e}_j)=0$ za $i \neq j$, a *ortonormiran* ako je pritom $(\boldsymbol{e}_i|\boldsymbol{e}_i)=1$ za svaki i.

Ako je $(\boldsymbol{e}_k)$ ortogonalna baza, tada je problem određivanja koeficijenata x_i u prikazu vektora $\boldsymbol{x}$ u toj bazi jednostavan. Ako je $\boldsymbol{x}=x_1\boldsymbol{e}_1+\ldots+x_n\boldsymbol{e}_n$, onda se koeficijenti računaju prema $x_i = \frac{(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{e}_i)}{(\boldsymbol{e}_i|\boldsymbol{e}_i)}$. Rastav

$$\boldsymbol{x}=\sum_{i=1}^{n}\frac{(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{e}_i)}{(\boldsymbol{e}_i|\boldsymbol{e}_i)}\boldsymbol{e}_i \tag{26}$$

naziva se *Fourierov rastav* vektora $\boldsymbol{x}$. Taj se rastav neposredno poopćuje i na slučaj kad je X beskonačnodimenzijski prostor. U primjenama to je najčešće prostor L^2 kvadratno integrabilnih funkcija. Prikaz neke funkcije u obliku *Fourierova reda* po nekom sustavu ortogonalnih funkcija osnova je *harmonijske analize*, važnog dijela suvremene matematike.

Dodatna je važnost pojma ortogonalnosti u tome što se u unitarnom prostoru svaki niz nezavisnih vektora može ortonormirati, tj. zamijeniti nizom ortonormiranih vektora koji će na svakoj razini razapinjati isti prostor kao i elementi početnog niza. Taj se postupak naziva *Gram-Schmidtovim postupkom ortogonalizacije*. Preciznije, neka je $\boldsymbol{a}_1,\ldots,\boldsymbol{a}_n$ niz linearno nezavisnih vektora. Oni se mogu zamijeniti ortogonalnim nizom $\boldsymbol{e}_1,\ldots,\boldsymbol{e}_n$ na sljedeći način:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{e}_1&=\boldsymbol{a}_1,\\ \boldsymbol{e}_2&=\boldsymbol{a}_2-\frac{(\boldsymbol{a}_2|\boldsymbol{e}_1)}{(\boldsymbol{e}_1|\boldsymbol{e}_1)}\boldsymbol{e}_1,\\ &\vdots\\ \boldsymbol{e}_n&=\boldsymbol{a}_n-\sum_{i=1}^{n-1}\frac{(\boldsymbol{a}_n|\boldsymbol{e}_i)}{(\boldsymbol{e}_i|\boldsymbol{e}_i)}\boldsymbol{e}_i,\end{aligned} \tag{27}$$

i pritom je $L(\boldsymbol{e}_1,\ldots,\boldsymbol{e}_k)=L(\boldsymbol{a}_1,\ldots,\boldsymbol{a}_k)$ za svaki $k\in\{1,2,\ldots,n\}$.

Normirani prostori. Norma na kompleksnom (ili realnom) vektorskom prostoru X svaka je funkcija $\|\cdot\|: X\to\mathbf{R}$ koja ima sljedeća svojstva:

1) pozitivnost, $\|\boldsymbol{x}\|\geqq 0, \|\boldsymbol{x}\|=0 \Leftrightarrow \boldsymbol{x}=0$,

2) pozitivnu homogenost, $\|\lambda\boldsymbol{x}\|=|\lambda|\cdot\|\boldsymbol{x}\|$,

3) nejednakost trokuta, $\|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\|\leqq\|\boldsymbol{x}\|+\|\boldsymbol{y}\|$.

Vektorski prostor X na kojemu je definirana neka norma naziva se *normiranim prostorom*.

U normiranom prostoru X definirana je i *udaljenost dvaju vektora* s $d(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}):=\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|$ kao i konvergencija niza: $\boldsymbol{x}_n\to\boldsymbol{x}$ ako i samo ako $\|\boldsymbol{x}_n-\boldsymbol{x}\|\to 0$.

Svaki je unitarni prostor prirodno normiran. Norma se, naime, definira kao $\|\boldsymbol{x}\|=\sqrt{(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{x})}$. Relacija trokuta slijedi iz *nejednakosti Cauchy-Schwartz-Buniakowskog* (CSB-nejednakost):

$$|(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{y})|\leqq\|\boldsymbol{x}\|\cdot\|\boldsymbol{y}\|. \tag{28}$$

Normirani prostor, međutim, ne mora biti unitaran. On to jest ako norma zadovoljava i relaciju paralelograma:

$$\|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\|^2+\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|^2=2\left(\|\boldsymbol{x}\|^2+\|\boldsymbol{y}\|^2\right). \tag{29}$$

Skalarni je umnožak onda određen izrazom

$$(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{y})=\frac{1}{4}\left(\|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\|^2-\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|^2\right), \tag{30}$$

ako je X realni vektorski prostor. Ako je X kompleksan, izraz je nešto složeniji.

Primjeri normiranih vektorskih prostora. *Prostor* V^3 je uz uobičajeno skalarno množenje realni unitarni prostor.

Prostor $\mathbf{R}^n$ je unitarni prostor sa skalarnim umnoškom:

$$(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{y})=x_1y_1+\ldots+x_ny_n. \tag{31}$$

Norma vektora jest

$$\|\boldsymbol{x}\|=\sqrt{x_1^2+\ldots+x_n^2}, \tag{32}$$

a CSB-nejednakost glasi

$$(x_1y_1+\ldots+x_ny_n)^2\leqq(x_1^2+\ldots+x_n^2)(y_1^2+\ldots+y_n^2). \tag{33}$$

$\mathbf{R}^n$ *kao normirani prostor.* $\mathbf{R}^n$ je normirani prostor i uz sljedeće norme (koje se susreću u numeričkoj linearnoj algebri češće nego prethodna norma):

$$\|\boldsymbol{x}\|_1=|x_1|+\ldots+|x_n|, \tag{34}$$

$$\|\boldsymbol{x}\|_\infty=\max\{|x_1|,\ldots,|x_n|\} \tag{35}$$

i općenito

$$\|\boldsymbol{x}\|_p:=\left(\sum|x_i|^p\right)^{1/p},\quad 1\leqq p\leqq\infty. \tag{36}$$

Od njih, jedino je norma $\|\cdot\|_2$ izvedena iz skalarnog umnoška.

Prostor $L^2(a,b)$. To je unitaran prostor kvadratno integrabilnih funkcija definiranih na intervalu $(a,b)\subseteq\mathbf{R}$, sa skalarnim umnoškom:

$$(f|g):=\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x. \tag{37}$$

Norma funkcije jest

$$\|f\|=\left(\int_a^b|f(x)|^2\mathrm{d}x\right)^{1/2}, \tag{38}$$

a CSB-nejednakost

$$\left|\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x\right|\leqq\left(\int_a^b|f(x)|^2\mathrm{d}x\right)^{1/2}\left(\int_a^b|g(x)|^2\mathrm{d}x\right)^{1/2}. \tag{39}$$

MATRICE

Definicija matrice. Pojam i osnovna svojstva matrice već su opisani (v. *Aritmetika i algebra*, TE 1, str. 371). Matrica $\boldsymbol{A}$ je pravokutna tablica u kojoj su smještene veličine a_{ij}, $i=1,\ldots,m$, $j=1,\ldots,n$ nazvane *elementima* matrice. Najčešće su ti elementi realni brojevi, kompleksni brojevi ili općenito elementi nekog polja $\mathbf{K}$, kada je to matrica nad poljem $\mathbf{K}$. Međutim, elementi matrice mogu biti i drugi objekti, poput funkcija, diferencijalnih operatora ili pak samih matrica.

Matrica se zapisuje u obliku

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}a_{11}&\cdots&a_{1n}\\ \vdots&&\\ a_{m1}&\cdots&a_{mn}\end{bmatrix}, \tag{40}$$

ili kraće, $\boldsymbol{A}=[a_{ij}]$. Ta je matrica *tipa* $m\times n$, gdje je m broj redaka, a n broj stupaca. Kad je $m=n$ govori se o kvadratnoj matrici *reda* n. Dvije su matrice jednake ako su istog tipa i ako su im odgovarajući elementi jednaki.

Zamijene li se retci stupcima u matrici $\boldsymbol{A}$, dobije se *transponirana matrica*. To je matrica $\boldsymbol{A}^\mathrm{T}$ s elementima

$$\boldsymbol{A}^\mathrm{T}=\begin{bmatrix}a_{11}&\cdots&a_{m1}\\ \vdots&&\\ a_{1n}&\cdots&a_{mn}\end{bmatrix}. \tag{41}$$

Operacija transponiranja ima sljedeća svojstva:

$$\boldsymbol{A}^\mathrm{TT}=\boldsymbol{A}, \tag{42 a}$$

$$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^\mathrm{T}=\boldsymbol{A}^\mathrm{T}+\boldsymbol{B}^\mathrm{T}, \tag{42 b}$$

$$(\alpha\boldsymbol{A})^\mathrm{T}=\alpha\boldsymbol{A}^\mathrm{T}. \tag{42 c}$$

Vektor se može poistovjetiti s jednostupčanom ili jednoretčanom matricom. Ako je zadan vektor $\boldsymbol{a}=\begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$, tada se s $\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}$ označuje vektor-redak, $\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}=[a_1,\dots,a_n]$ (transponirani vektor).

Kvadratne matrice. Skup svih kvadratnih matrica reda n, kojima su elementi iz polja $\mathbf{K}$, označuje se s $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$.

Matrica A s realnim elementima je *simetrična* ako vrijedi $A=A^{\mathrm{T}}$, a antisimetrična ako je $A^{\mathrm{T}}=-A$. Ako je A matrica nad poljem kompleksnih brojeva, tada se umjesto simetričnosti definira pojam hermitičnosti matrice. S A^* se označuje matrica s elementima $a^*_{ij}:=\overline{a_{ji}}$. Matrica A je *hermitska*, ako vrijedi $A=A^*$, a *antihermitska* ako je $A=-A^*$.

Kvadratna matrica $A=[a_{ij}]$ je *gornja trokutasta* ako je $a_{ij}=0$ za $i>j$, a *donja trokutasta* ako je $a_{ij}=0$ za $i<j$. Tako su matrice

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}, \quad B=\begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \tag{43}$$

gornje trokutaste, dok su

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}, \quad B=\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 2 & -1 & -3 & -4 \end{bmatrix} \tag{44}$$

donje trokutaste matrice.

Glavnu dijagonalu kvadratne matrice A čine elementi $a_{11},\dots,a_{nn}$. Matrica A je dijagonalna ako su svi elementi izvan glavne dijagonale jednaki nuli. Specijalni slučaj dijagonalne matrice je *skalarna* matrica, kad su svi dijagonalni elementi jednaki, $a_{ii}=\lambda$, a njezin je specijalni slučaj *jedinična matrica* $\boldsymbol{I}$ kad je $\lambda=1$, tj.

$$\boldsymbol{I}=\begin{bmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}. \tag{45}$$

S $\boldsymbol{O}$ ili 0 označuje se *nul-matrica, sa svim elementima jednakim nuli:*

$$\boldsymbol{O}=\begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}. \tag{46}$$

Algebra matrica. Uz neke uvjete, na skupu matrica definirane su operacije zbrajanja i množenja matrica. *Zbroj* $A+B$ dviju matrica definiran je ako i samo ako su one istog tipa. Tada je i njihov zbroj matrica istog tipa, s elementima $(a_{ij}+b_{ij})$, tj. dvije matrice se zbrajaju tako da im se zbroje odgovarajući elementi.

Umnožak skalara $\lambda\in\mathbf{K}$ i matrice je matrica istog tipa s elementima (λa_{ij}), tj. matrica se množi s brojem tako da se tim brojem pomnoži svaki element matrice.

Uz te dvije operacije skup svih matrica postaje vektorskim prostorom. Dimenzija je tog prostora mn. Simetrične, antisimetrične, hermitske, antihermitske, trokutaste i dijagonalne matrice čine potprostor prostora svih matrica istog tipa.

Umnožak matrica. Umnožak AB matrice A tipa $m\times n$ i matrice B tipa $s\times p$ definiran je samo ako su one *ulančane*, tj. ako je $s=n$.

Vektor-redak može se pomnožiti s vektor-stupcem ovako:

$$[a_1,\dots,a_n]\begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}=a_1 b_1+\dots+a_n b_n. \tag{47}$$

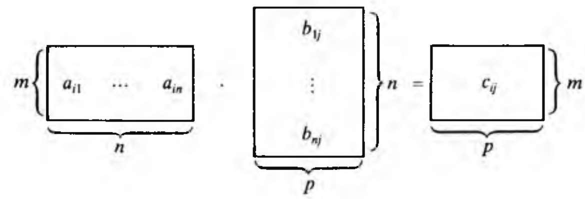
To je upravo skalarni umnožak vektora $\boldsymbol{a}$ i $\boldsymbol{b}$.

Neka je $A=[a_{ik}]$ tipa $m\times n$ i $B=[b_{kj}]$ tipa $n\times p$. Ako je $\boldsymbol{a}^i=[a_{i1},\dots,a_{in}]$ i-ti redak matrice A, a $\boldsymbol{b}_j=[b_{1j},\dots,b_{nj}]^{\mathrm{T}}$ j-ti stupac matrice B, tada je definiran umnožak $\boldsymbol{a}^i\cdot\boldsymbol{b}_j=a_{i1}b_{1j}+\dots+a_{in}b_{nj}$.

Umnožak matrica A i B je matrica $C=(c_{ij})$ tipa $m\times p$ s elementima

$$c_{ij}=\boldsymbol{a}^i\cdot\boldsymbol{b}_j=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}\,b_{kj}. \tag{48}$$

Množenje matrica može se prikazati shemom (sl. 4).



Sl. 4. Množenje matrica

Umnožak ima svojstva asocijativnosti, $(AB)C=A(BC)$, kvaziasocijativnosti, $(\lambda A)B=\lambda(AB)=A(\lambda B)$ i distributivnosti prema zbrajanju, $(A+B)C=AC+BC$, $A(B+C)=AB+AC$. Nadalje, vrijedi $(AB)^{\mathrm{T}}=B^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}$. Međutim, općenito ne vrijedi $AB=BA$, množenje matrica nije komutativno. Štoviše, umnožak BA neće biti definiran ako je $m\neq p$. Na primjer

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \tag{49}$$

ali

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \tag{50}$$

Tim je svojstvima utvrđeno da je prostor $\mathcal{M}_n$ uz množenje matrica *algebra*, asocijativna, s jedinicom (to je jedinična matrica $\boldsymbol{I}$), ali nekomutativna za $n>1$. (Vektorski prostor V^3 uz vektorsko množenje je također algebra, neasocijativna, bez jedinice, nekomutativna, ali sa svojstvom antikomutativnosti.)

Gornji primjer pokazuje da u algebri matrica ne vrijedi ni sljedeći »uobičajeni« zaključak: ako je $A\cdot B=0$, tada je barem jedna od matrica A ili B jednaka nuli. Štoviše, za matricu $A=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ vrijedi $A^2=A\cdot A=0$. Kaže se da u toj algebri postoje *djelitelji nule*.

Matrica A je *regularna* ako postoji matrica A' takva da vrijedi

$$AA'=A'A=I. \tag{51}$$

Takva matrica, ako postoji, mora biti jedinstvena. Označuje se s A^{-1} i naziva *inverznom matricom*. Nalaženje inverza važan je problem linearne algebre. Stoga je važno uočiti kad matrica ima inverz, te kako se on računa.

Najlakši odgovor na prvo pitanje daje pojam ranga. *Rang* matrice (ne nužno kvadratne) jest broj njezinih linearno nezavisnih redaka (svaki je redak shvaćen kao vektor n-dimenzijskog prostora). Važno je napomenuti da je taj broj jednak broju linearno nezavisnih stupaca, čak i kad matrica nije kvadratnog oblika! Kvadratna matrica je regularna ako i samo ako je ranga n, tj. ako su svi njezini retci (ili njezini stupci) linearno nezavisni vektori.

Sličnost matrica. Kvadratne matrice A i B istog reda su *slične* ako postoji regularna matrica S takva da vrijedi $B=S^{-1}AS$. Vrlo važan problem teorije matrica jest određivanje matrice B što jednostavnijeg oblika, a koja je slična zadanoj matrici A. Tako, npr., svaka kvadratna matrica nad $\mathbf{C}$ slična je gornjoj trokutastoj, svaka simetrična matrica slična je dijagonalnoj (i pritom postoji matrica S za koju vrijedi $S^{-1}=S^{\mathrm{T}}$). Taj problem povezan je s određivanjem svojstvenih vektora i svojstvenih vrijednosti matrice.

Determinante. Pojam determinante prirodno je povezan s problemom rješavanja sustava linearnih jednadžbi. Za svaku kvadratnu matricu A definiran je broj nazvan *determinanta* matrice A koji se označuje $\det A$, $|A|$ ili

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}. \tag{52}$$

Determinanta se najlakše definira induktivno. Za kvadratnu matricu reda 2 definira se

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}. \tag{53}$$

Determinanta matrice n-tog reda računa se svođenjem na determinante matrica reda $n-1$:

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{cases} a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \ldots + a_{in}A_{in}, \\ \text{ili} \\ a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \ldots + a_{nj}A_{nj}, \end{cases} \tag{54}$$

gdje je s A_{ij} označen *algebarski komplement* elementa a_{ij} koji se definira ovako:

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}, \tag{55}$$

gdje je M_{ij} minora reda $n-1$: determinanta matrice koja se dobije kad se u matrici A izbaci i-ti redak i j-ti stupac. Na primjer, za matricu

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & -2 & -1 \\ -3 & 2 & -1 & 3 \\ 1 & -2 & 4 & -5 \end{bmatrix} \tag{56}$$

neke od minora glase:

$$M_{12} = \begin{vmatrix} 0 & -2 & -1 \\ -3 & -1 & 3 \\ 1 & 4 & -5 \end{vmatrix}, \quad M_{34} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 3 & -2 \\ 1 & -2 & 4 \end{vmatrix}. \tag{57}$$

Nastavljajući rastavljanje determinante dolazi se do prikaza

$$\det A = \sum (-1)^{\pi(i_1,\ldots,i_n)} a_{1i_1} a_{2i_2} \cdots a_{ni_n}. \tag{58}$$

Zbroj se uzima po svim permutacijama $(i_1, i_2, \ldots, i_n) \in \{1, 2, \ldots, n\}$, a $\pi(i_1, i_2, \ldots, i_n)$ iznosi 0 ili 1, već prema tome je li $(i_1, i_2, \ldots, i_n)$ parna ili neparna permutacija. Ta suma ima točno $n!$ pribrojnika.

Primjer. Računanje determinante razvojem po prvom retku:

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 & -3 \\ 1 & -2 & 5 \\ 4 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 2\begin{bmatrix} -2 & 5 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} - 4\begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 4 & -2 \end{bmatrix} - 3\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= 2(4-5) - 4(-2-20) - 3(1+8) = 59.$$

Računanje determinante za velike brojeve n ne može se osnivati na tim definicijama, jer one zahtijevaju $(n-1)\cdot n!$ operacija množenja, što je za ne tako velike n neizvedivo, čak i uz pomoć računala. Tako je za $n=100$ potrebno učiniti oko $9{,}23 \cdot 10^{159}$ operacija, što zahtijeva, po današnjim mogućnostima, oko 10^{145} godina računanja!

Determinante imaju sljedeća svojstva:

1) Ako su elementi nekog retka ili nekog stupca matrice A jednaki nuli, tada je $\det A = 0$.

2) Ako su bilo koja dva retka ili bilo koja dva stupca matrice A proporcionalna, tada je $\det A = 0$.

3) Ako se u matrici A zamijene bilo koja dva retka ili bilo koja dva stupca, tada determinanta mijenja predznak.

4) Determinanta se množi brojem tako da se tim brojem pomnože elementi (samo) jednog retka ili stupca matrice A.

5) Iz prethodnog svojstva slijedi $\det(\lambda A) = \lambda^n \det A$, za matricu reda n.

6) Za kvadratne matrice A i B vrijedi

$$\det(AB) = \det A \cdot \det B. \tag{59}$$

To svojstvo, donekle iznenađujuće s obzirom na definiciju množenja matrica i samih determinanata, naziva se *Binet-Cauchyjevim teoremom*. Dokazao ga je francuski matematičar A.-L. Cauchy 1815. godine.

7) Matrica A je *regularna*, tj. skup njezinih redaka (stupaca) je linearno nezavisan, ako i samo ako je $\det A \neq 0$.

Računanje determinanata osniva se na primjeni sljedeće dopuštene operacije, kojom se mijenja oblik determinante, ali ne i njezina vrijednost.

8) Determinanta matrice ne mijenja vrijednost ako se elementima nekog stupca (ili retka) dodaju odgovarajući elementi kojeg drugog stupca (ili retka) pomnoženi bilo kojim brojem. Primjenom tog postupka i nekog od prethodnih svojstava moguće je determinantu svesti na trokutasti oblik.

9) Ako je A trokutasta matrica, tada je njezina determinanta jednaka umnošku dijagonalnih elemenata, $\det A = a_{11} a_{22} \ldots a_{nn}$.

Računanje vrijednosti determinante svođenjem na trokutasti oblik naziva se *Gaussovim postupkom*. Tako se determinanta matrice može izračunati s približno $2n^3/3$ operacija, što je za velike n zanemariv broj prema već navedenom.

Potrebno je spomenuti da za determinante *ne vrijedi* linearnost, općenito je $\det(\lambda A + \mu B) \neq \lambda \det A + \mu \det B$, pa i $\det(A+B) \neq \det A + \det B$.

LINEARNI SUSTAVI

Rješivost linearnog sustava. Linearna jednadžba nad poljem **K** je jednadžba oblika $a_1 x_1 + \ldots + a_n x_n = b$, u kojoj su *koeficijenti jednadžbe* $a_1, \ldots, a_n$ i slobodni koeficijent b iz polja **K**. Linearni sustav s realnim koeficijentima je kolekcija jednadžbi oblika

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n &= b_m, \end{aligned} \tag{60}$$

gdje su $a_{ij}, b_i \in \mathbf{R}$ dani skalari. Bez narušavanja općenitosti mogao bi se promatrati sustav nad poljem **C** ili nekim drugim poljem. Linearni sustav se zapisuje u matričnom obliku $Ax = b$, gdje je

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}. \tag{61}$$

Matrica A je matrica sustava (60), x je vektor nepoznanica, a b vektor slobodnih koeficijenata (tzv. desna strana sustava).

Pri rješavanju linearnog sustava (60) postavljaju se sljedeća pitanja: kada taj sustav ima rješenje i kako se ono računa? Odgovor na prvo pitanje ovisi o rangu matrice A: sustav ima rješenje ako i samo ako je rang matrice A jednak rangu *proširene matrice* koja se dobije pripisivanjem vektora b matrici sustava:

$$A' = \left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right]. \tag{62}$$

To je čuveni *Kronecker-Capellijev teorem*. Rješenje, ako postoji, ne mora biti jedinstveno. Skup svih rješenja je ili prazan, ili točka, ili afini potprostor prostora $\mathbf{R}^n$ (translacija vektorskog potprostora za neki vektor). Tako opće rješenje ima oblik

$$x = c + \lambda_1 w_1 + \ldots + \lambda_k w_k, \tag{63}$$

gdje su $w_1, \ldots, w_k$ rješenja homogenog sustava.

Postupci rješavanja sustava (60) dijele se na direktne i iterativne. Direktni su oni postupci kojima se s konačno mnogo računskih operacija dobiva točan rezultat. Iterativnim se postupcima rješenje sustava linearnih jednadžbi dobiva kao granična vrijednost niza vektora.

Cramerovo pravilo. Od najveće su važnosti sustavi s kvadratnom matricom A, u kojima se broj jednadžbi podudara s brojem nepoznanica. Takav će sustav imati jedinstveno rješenje onda i samo onda ako je A regularna matrica, odnosno ako je $\det A \neq 0$. To je rješenje:

$$x_i = \frac{D_i}{D}, \quad i = 1,2,\ldots,n, \tag{64}$$

gdje je $D = \det A$, $D_i = \det A_i$, a A_i je matrica u kojoj je i-ti stupac zamijenjen vektorom $\boldsymbol{b}$.

Prema (64) dobiva se rješenje sustava dviju linearnih jednadžbi s dvije nepoznanice:

$$\left.\begin{matrix} ax+by=e \\ cx+dy=f \end{matrix}\right\} \Rightarrow x = \frac{ed-bf}{ad-bc}, \quad y = \frac{af-ec}{ad-bc}. \tag{65}$$

Za sustave 3×3 Cramerovo se pravilo još uvijek dade upotrijebiti, međutim, za veće brojeve n jednostavnije je primijeniti Gaussov postupak.

Gaussov postupak eliminacije. Gaussov postupak rješavanja linearnih sustava ubraja se u *direktne postupke*. Taj je algoritam zasigurno najjednostavniji način rješavanja linearnih sustava i, uz manje nadopune i modifikacije, primjenjiv je u svim slučajevima. Njime se mogu rješavati sustavi s m jednadžbi i n nepoznanica. Za kvadratne matrice suština je Gaussova postupka u svođenju linearnog sustava

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \tag{66}$$

na jednostavniji, trokutasti oblik $\boldsymbol{Rx}=\boldsymbol{d}$, gdje su

$$\boldsymbol{R} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & \cdots & r_{1n} \\ & r_{22} & & r_{2n} \\ & & \ddots & \\ & & & r_{nn} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{d} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_n \end{bmatrix}. \tag{67}$$

Pritom su sustavi (66) i (67) ekvivalentni, tj. imaju isti skup rješenja.

Sustav (67) rješava se na jednostavan način, od posljednje jednadžbe prema prvoj, postupkom koji se naziva *obratnim hodom*:

$$x_n = \frac{c_n}{r_{nn}}, \tag{68a}$$

$$x_i = \frac{1}{r_{ii}}\left(c_i - \sum_{k=i+1}^{n} r_{ik} x_k\right), \quad i = n-1,\ldots,1. \tag{68b}$$

Sustav (66) svodi se na trokutasti oblik na sljedeći način. Neka je $a_{11} \neq 0$. Tada se elementi vektora $\boldsymbol{b}$ i matrice $\boldsymbol{A}$, počevši od drugog retka, zamjenjuju s $b_i' = b_i - \frac{a_{i1}}{a_{11}} b_1$, $a_{ij}' = a_{ij} - \frac{a_{i1}}{a_{11}} a_{1j}$. Pritom se postiže da se svi elementi prvog stupca, osim stožernog elementa a_{11}, poništavaju. Sustav dobiva oblik

$$\left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ 0 & a_{22}' & \cdots & a_{2n}' & b_2' \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & a_{n2}' & & a_{nn}' & b_n' \end{array}\right]. \tag{69}$$

Ponavljanjem tog postupka, uzimajući a_{22}' za stožerni element, matrica se svodi na trokutasti oblik.

Ako se sve operacije izvode točno, konačan rezultat mora biti apsolutno točan. Međutim, u numeričkim postupcima nezaobilazne su pogreške zaokruživanja pri računanju s realnim brojevima. Stoga, želi li se osigurati točnost te metode, treba smanjiti preveliki utjecaj takvih pogrešaka. Obično se to postiže postupkom *pivotiranja*. Za stožerni se element u svakom koraku izabire element koji je najveći po apsolutnoj vrijednosti od svih koji su na raspolaganju, bilo u stupcu kojeg se transformira, bilo u čitavom preostalom dijelu matrice. Taj se izbor postiže odgovarajućom zamjenom redaka i stupaca matrice.

Gaussov postupak vrlo je brz algoritam. Za potpuno rješenje linearnog sustava reda n potrebno je učiniti točno $(1/6)\cdot(4n^3 + 9n^2 - 7n)$ operacija.

Postoje mnogobrojne inačice te metode. Takav je npr. *Gauss-Jordanov postupak* u kojem se u svakom koraku transformiraju *svi* retci matrice, a ne samo oni ispod stožernog elementa. Tim se postupkom matrica svodi na dijagonalnu te je izbjegnut postupak obratnog hoda. Međutim, ukupan je broj potrebnih operacija povećan, on je reda n^3.

Računanje inverzne matrice. Kvadratna će matrica imati inverz onda i samo onda ako je regularna. Nužan i dovoljan uvjet za to je bilo koji od uvjeta: njezin rang iznosi n, njezina je determinanta različita od nule te nula nije njezina svojstvena vrijednost (v. *Svojstvene vrijednosti* u ovom članku).

Slično kao i pri rješavanju kvadratnih sustava, inverzna se matrica može naći eksplicitnim izrazom, koji je za $n>3$ nepraktičan za račun:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\tilde{A}^{\mathrm{T}}, \tag{70}$$

gdje je $\tilde{A}$ *adjunkta* matrice A, tj. matrica kojoj su elementi algebarski komplementi A_{ij}.

Primjer. Inverz regularne matrice reda 2 ima oblik

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}. \tag{71}$$

Primjer. Računanje inverza matrice reda 3: neka je

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Najprije se računa determinanta (razvojem determinante po drugom retku):

$$\det A = 2\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} - (-1)\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -15$$

i kako je ona različita od nule, nastavlja se prema izrazu

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -3 & -6 \\ -5 & -5 & 2 \\ -7 & 2 & 4 \end{bmatrix},$$

a prema (63)

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\tilde{A}^{\mathrm{T}} = -\frac{1}{15}\begin{bmatrix} 3 & -5 & -7 \\ -3 & -5 & 2 \\ -6 & 5 & 4 \end{bmatrix}.$$

Pri računanju inverzne matrice primjenjuje se uglavnom Gauss-Jordanov postupak. Problem određivanja inverzne matrice može se opisati s n linearnih sustava oblika $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_i = \boldsymbol{e}_i$, gdje je $\boldsymbol{A}$ matrica kojoj se inverz traži, a $\boldsymbol{e}_i$ sljedeći vektori:

$$\boldsymbol{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \ldots, \quad \boldsymbol{e}_n = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}. \tag{72}$$

Inverzna će matrica biti matrica X kojoj su stupci rješenja $x_1, x_2, \ldots, x_n$ prethodnih sustava. Kako svi ti sustavi imaju istu matricu A, mogu se rješavati istodobno, tako da se umjesto vektora b s desne strane transformira istodobno n vektora $e_1, \ldots, e_n$, koji čine zajedno jediničnu matricu I. Primjenom Gauss-Jordanova postupka matrica A transformira se na dijagonalni oblik s jedinicama na mjestu dijagonalnih elemenata. Shematski, provodi se algoritam $[A|I] \to [I|X]$ na koncu kojeg će biti $X=A^{-1}$.

Primjer:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & -3 & 1 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \end{array}\right]$$

te je

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} -1 & -1 & 3 \\ -1 & 3 & -1 \\ 3 & -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Za računanje inverzne matrice Gaussovim ili Gauss-Jordanovim postupkom potrebno je učiniti točno n^3 operacija množenja te $n(n-1)^2$ operacija zbrajanja. Taj je broj upravo jednak broju operacija koje je potrebno učiniti da se pomnože dvije matrice reda n.

Iterativni postupci. Linearni se sustavi osim direktnim mogu rješavati i iterativnim postupcima. U usporedbi s direktnim, iterativni se postupci primjenjuju uglavnom za neke specijalne vrste matrica koje su rijetko popunjene (s mnogo nul-elemenata) ili imaju dijagonalno dominantnu matricu (elementi na dijagonali veći su po apsolutnoj vrijednosti od zbroja apsolutnih vrijednosti preostalih elemenata u retku ili stupcu matrice). Općenito, teško je unaprijed prepoznati za koju će matricu pojedini iterativni postupak konvergirati.

Iako je riječ o beskonačnom postupku, potreban broj operacija da bi se rješenje dobilo sa zadanom točnošću može biti manji nego u direktnim postupcima. Također, iterativni su postupci manje osjetljivi na pogreške zaokruživanja, jer one u tom postupku gube na važnosti zbog ionako po volji odabranih početnih iteracija.

Suština je iterativnog postupka u tome da se sustav $Ax=b$ napiše u ekvivalentnom obliku $x=Tx+k$. To se obično postiže odgovarajućim *cijepanjem* matrice A. Ako se napiše $A=D-B$, tada sustav $Ax=b$ prelazi u $Dx=Bx+b$, odnosno $x=D^{-1}Bx+D^{-1}b:=Tx+k$. Tu je $T=D^{-1}B$, stoga se matrica D bira što je moguće jednostavnijeg oblika kako bi se mogla jednostavno invertirati.

Postupak se provodi na sljedeći način: vektor $x^{(0)}$ (početna iteracija) bira se po volji. Pritom se nastoji, ako je to ikako moguće, odabrati vektor blizak rješenju jer se time smanjuje ukupan broj potrebnih iteracija. Nakon toga se određuju sljedeće iteracije:

$$x^{(r+1)} = Tx^{(r)} + k. \tag{73}$$

Da bi postupak konvergirao, matrica T ne može biti bilo kakva. Nužan i dovoljan uvjet konvergencije (za po volji odabran vektor $x^{(0)}$) jest da sve svojstvene vrijednosti matrice T budu po modulu manje od 1. Kako je taj uvjet vrlo teško provjeriti, obično se primjenjuje neki od dovoljnih uvjeta; dovoljno je da bude $\|T\|<1$, gdje je $\|T\|$ bilo koja operatorska norma (norma na prostoru matrica koja zadovoljava još i dodatan uvjet $\|AB\| \leqq \|A\| \cdot \|B\|$). Obično se provjerava taj uvjet za jednu od sljedeće dvije norme:

$$\|T\|_\infty := \max_i \sum_{j=1}^{n} |t_{ij}|, \tag{74a}$$

$$\|T\|_1 := \max_j \sum_{i=1}^{n} |t_{ij}|. \tag{74b}$$

Jacobijev postupak. Jacobijevim se postupkom za D bira dijagonalna matrica kojoj su elementi upravo dijagonalni elementi matrice A. Tada iterativni postupak glasi

$$x_i^{(r+1)} = -\frac{1}{a_{ii}} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{r} a_{ij} x_j^{(r)} + \frac{b_i}{a_{ii}}, \quad i=1,2,\ldots,n; \quad r=0,1,2,\ldots \tag{75}$$

Dovoljan uvjet za konvergenciju postupka jest da matrica A bude dijagonalno dominantna, tj. da u svakom retku apsolutna vrijednost dijagonalnog elementa bude veća od zbroja apsolutnih vrijednosti preostalih elemenata u retku.

Gauss-Seidelov postupak. Ako se za matricu D izabere donji trokut matrice A, odgovarajući se postupak naziva *Gauss-Seidelov algoritam*. Tada je matrica $T=D^{-1}B$. U praksi tu matricu nije potrebno određivati, već se iteracije računaju na osnovi postupka $Dx^{(r+1)}=Bx^{(r)}+b$, odakle slijede izrazi

$$x_1^{(r+1)} = -\frac{1}{a_{11}} \sum_{j=2}^{n} a_{1j} x_j^{(r)} + \frac{b_1}{a_{11}}, \tag{76a}$$

$$x_i^{(r+1)} = -\frac{1}{a_{i1}} \left(\sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(r+1)} + \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j^{(r)} \right) + \frac{b_i}{a_{ii}}, \quad i=2,3,\ldots,n-1, \tag{76b}$$

$$x_n^{(r+1)} = -\frac{1}{a_{nn}} \sum_{j=1}^{n-1} a_{nj} x_j^{(r+1)} + \frac{b_n}{a_{nn}}. \tag{76c}$$

Postupak konvergira za dijagonalno dominantne matrice. Uz njih, konvergencija je osigurana i za simetrične pozitivno definitne matrice, što je vrlo važna klasa matrica u različitim primjenama.

LINEARNI OPERATORI

Neka su X i Y vektorski prostori nad istim poljem $\mathbf{K}$. Linearni operator je preslikavanje $A: X \to Y$ za koje vrijedi aditivnost, $A(x_1+x_2)=A(x_1)+A(x_2)$, za sve $x \in X$, i homogenost, $A(\lambda x)= =\lambda A(x)$, za sve $\lambda \in \mathbf{K}, x \in X$. Ekvivalentno, ti se uvjeti mogu zamijeniti uvjetom linearnosti:

$$A(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) = \lambda_1 A(x_1) + \lambda_2 A(x_2) \tag{77}$$

za sve $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbf{K}$, $x_1, x_2 \in X$.

Prostor svih linearnih operatora s vektorskog prostora X u vektorski prostor Y označuje se $L(X, Y)$. Uz operacije

$$(A+B)(x) := A(x) + B(x), \tag{78a}$$

$$(\lambda A)(x) := \lambda A(x) \tag{78b}$$

$L(X, Y)$ postaje i sam vektorski prostor.

Neka su X, Y, Z tri vektorska prostora, a $A: X \to Y$, $B: Y \to Z$ linearni operatori. Kompozicija $B \circ A$ ponovno je linearni operator. Operator $B \circ A$ naziva se umnoškom linearnih operatora i označuje BA.

Prikaz operatora u paru baza. Linearni operator potpuno je određen ako se poznaje njegovo djelovanje na vektorima baze. Neka je $A: X \to Y$, $(e_1, \ldots, e_n)$ baza u prostoru X i $(f_1, \ldots, f_m)$ baza u prostoru Y. Tada se svaki vektor $x \in X$ može napisati kao linearna kombinacija elemenata baze, $x = x_1 e_1 + \ldots + x_n e_n$. Djelovanje operatora na vektoru x određeno je djelovanjima na vektorima baze: $A(x) = x_1 A(e_1) + \ldots + x_n A(e_n)$. Vektor $A(e_j)$ može se napisati u obliku $A(e_j) = a_{1j} f_1 + \ldots + a_{mj} f_m$. Odavde slijedi

$$A(x) = \sum_{j=1}^{n} x_j A(e_j) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} a_{ij} x_j f_i. \tag{79}$$

Operator A je, dakle, potpuno određen matricom $A=[a_{ij}]$ koeficijenata u prikazu (79). Ta je matrica *prikaz operatora A* u gornjem paru baza. Piše se

$$A(e,f)=\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}. \qquad (80)$$

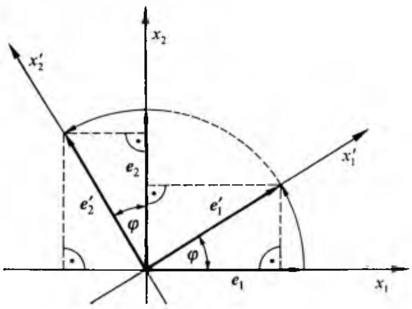
Promjena baze. Svaki sustav od n linearno nezavisnih vektora u n-dimenzijskom prostoru čini bazu. Ako su poznate koordinate vektora u jednoj bazi i veza između dviju baza, moguće je odrediti i njegove koordinate u drugoj bazi. Neka su $e=(e_1,\ldots,e_n)$ i $e'=(e'_1,\ldots,e'_n)$ dvije baze u X. Iz prikaza $e'_k=\Sigma_{i=1}^{n} s_{ik}\, e_i$ dobiva se matrica

$$S=[e'_1 \cdots e'_n]=\begin{bmatrix} s_{11} & \cdots & s_{1n} \\ \vdots & & \\ s_{n1} & \cdots & s_{nn} \end{bmatrix}, \qquad (81)$$

koja se naziva *matricom prijelaza* iz stare baze e u novu bazu e'. Svaki se vektor $x\in X$ može prikazati u obje baze. Ako je $x=(x_1,\ldots,x_n)=x_1 e_1+\ldots+x_n e_n$ prikaz vektora u staroj, a $x'=(x'_1,\ldots,x'_n)=x'_1 e'_1+\ldots+x'_n e'_n$ prikaz istog vektora u novoj bazi, tada vrijedi

$$x=Sx'; \quad x'=S^{-1}x. \qquad (82)$$

Transformacija ortonormiranih baza. Neka su $(e_1,\ldots,e_n)$ i $(e'_1,\ldots,e'_n)$ ortonormirane baze. Tada za matricu S vrijedi $S^{\mathrm{T}}S=I$ jer su elementi tog umnoška $\Sigma_{i=1}^{n} s_{ki}\, s_{kj}=(e'_i|e'_j)=\delta_{ij}$. Dakle, za matricu S vrijedi $S^{-1}=S^{\mathrm{T}}$ te je pri prijelazu u novu bazu nepotrebno računati inverz matrice S. Matrica S s tim svojstvom naziva se *ortogonalnom matricom*.



Sl. 5. Rotacija koordinatnog sustava

Primjer. Rotacija sustava u ravnini. Neka su $\{e_1,e_2\}$ te $\{e'_1,e'_2\}$ dva ortonormirana sustava u ravnini dobivena rotacijom za kut φ (sl. 5). Veza između stare i nove baze očitava se sa slike:

$$e'_1=\cos\varphi\, e_1+\sin\varphi\, e_2, \qquad (83\,\mathrm{a})$$

$$e'_2=-\sin\varphi\, e_1+\cos\varphi\, e_2, \qquad (83\,\mathrm{b})$$

te je

$$S=\begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix}, \qquad (84\,\mathrm{a})$$

$$S^{-1}=S^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix}. \qquad (84\,\mathrm{b})$$

Zato je veza između novih i starih koordinata

$$\begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}. \qquad (85)$$

Ovisnost matrice operatora o bazi. Neka je $A:X\to X$ linearni operator i matrica $A=A(e)$ prikaz tog operatora u bazi (e) vektorskog prostora X. Promijeni li se baza u novu (e'), promijenit će se i taj prikaz u matricu $A'=A(e')$. Pritom je njihova veza dana s

$$A'=S^{-1}AS. \qquad (86)$$

Matrice A i A' su slične. Vrijedi i obrat, slične matrice su prikazi istog operatora u raznim bazama.

Postavlja se pitanje kako odabrati bazu da bi taj prikaz imao što jednostavniji oblik. To se može postići pomoću svojstvenih vektora operatora A, odnosno pripadne matrice A.

Svojstvene vrijednosti i Jordanova forma. Neka je X vektorski prostor nad poljem $\mathbf{K}$, a $A:X\to X$ linearni operator. Skalar $\lambda\in\mathbf{K}$ je *svojstvena vrijednost* operatora A, ako postoji $x\in X$, $x\neq 0$, takav da vrijedi $Ax=\lambda x$. Kaže se da je x *svojstveni vektor* pridružen svojstvenoj vrijednosti λ.

Određivanje svojstvenih vrijednosti operatora vrlo je važan problem s mnogobrojnim primjenama (teorija vibracija, ravnotežna stanja, sustavi diferencijalnih jednadžbi, konvergencija iterativnih matričnih postupaka, teorija stabilnosti, ...).

Skup $W(\lambda)=\{x\in X: Ax=\lambda x\}$ je *svojstveni potprostor* pridružen svojstvenoj vrijednosti λ. On ne mora biti jednodimenzijski. Skup $\sigma(A)$ svih svojstvenih vrijednosti operatora A naziva se *spektar* operatora A. On može imati najviše n elemenata, gdje je $n=\dim X$.

Spektar se računa tražeći nul točke *karakterističnog* ili *svojstvenog polinoma* $\kappa(\lambda):=\det(\lambda I-A)$, gdje je A matrica operatora A u bilo kojoj bazi. Pritom se traže one svojstvene vrijednosti koje pripadaju polju $\mathbf{K}$. Ako je, npr., $A:X\to X$ linearni operator dan matricom $A=\begin{bmatrix} -1 & 5 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$, onda je $\kappa(\lambda)=\lambda^2+4$, pa je spektar $\sigma(A)=\{-2i,2i\}$ ako je X kompleksan prostor, odnosno $\sigma(A)=\emptyset$ ako je X realan prostor.

Ako je simetrična matrica A prikaz operatora A u nekoj bazi realnog vektorskog prostora, onda su sve njezine svojstvene vrijednosti realne. Nadalje, tada postoji n linearno nezavisnih svojstvenih vektora i oni su međusobno ortogonalni. Time je matricom A određena ortonormirana baza $(e_1,\ldots,e_n)$ i može se očekivati da u toj bazi pripadni operator ima najjednostavniji prikaz. Zaista, kako vrijedi $A(e_i)=\lambda_i e_i$, u toj bazi operator ima dijagonalni prikaz, s elementima $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$ na dijagonali. Matrica prijelaza iz stare baze u novu je ortogonalna matrica $S=[e_1,\ldots,e_n]$ kojoj su stupci svojstveni vektori matrice A. Tada je $S^{\mathrm{T}}AS$ dijagonalna matrica, s elementima $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$ na dijagonali, tj. operator A može se *dijagonalizirati*.

Opći je slučaj mnogo složeniji. Svaki se operator ne može dijagonalizirati, tj. svaka matrica nije slična dijagonalnoj. Jednostavan je takav primjer matrica $A=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$. Općenito, najjednostavniji oblik na koji se jedna kompleksna matrica može svesti, tj. najjednostavnija matrica kojoj je slična, jest tzv. *Jordanova forma* polazne matrice. Za bilo koju matricu A postoji matrica S takva da je $S^{-1}AS=J$, gdje matrica J na dijagonali ima sve svojstvene vrijednosti matrice. Međutim, ona ne mora biti dijagonalna, već poviše glavne dijagonale može imati elemente različite od nule. Neka su $\lambda_1,\ldots,\lambda_m$ sve različite svojstvene vrijednosti matrice A. Svakoj svojstvenoj vrijednosti matrice (npr. prvoj λ_1) odgovara *temeljni Jordanov blok* ili *Jordanova klijetka*, matrica oblika

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 & & 0 \\ & \lambda_1 & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda_1 \end{bmatrix} \qquad (87)$$

s elementima λ_1 na glavnoj dijagonali te jedinicama poviše te dijagonale. Svi su ostali elementi jednaki nuli. *Jordanov blok* sastavljen je od nekoliko Jordanovih klijetki različitih veličina, s istom svojstvenom vrijednošću na dijagonali, poput sljedećeg:

$$J_1=\begin{bmatrix} \boxed{\lambda_1} & & & & & & & \\ & \boxed{\lambda_1} & & & & & & \\ & & \lambda_1 & 1 & & & & \\ & & & \lambda_1 & & & & \\ & & & & \lambda_1 & 1 & & \\ & & & & & \lambda_1 & 1 & \\ & & & & & & \lambda_1 & 1 \\ & & & & & & & \lambda_1 \end{bmatrix}. \qquad (88)$$

Svi nenapisani elementi matrice jednaki su nuli.

Jordanova forma matrice A je blok-matrica koja na dijagonali ima Jordanove blokove. Svaki od njih odgovara drugoj svojstvenoj vrijednosti:

$$J=\begin{bmatrix} J_1 & & & 0 \\ & J_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & J_m \end{bmatrix}. \tag{89}$$

Značenje Jordanove forme je, među ostalim, u mogućnosti definiranja matričnih funkcija. Ako je f analitička funkcija definirana na spektru matrice A, tada se može definirati matrična funkcija $f(A)$ u obliku $f(A)=Sf(J)S^{-1}$. Matrica $f(J)$ se definira tako da se svaka elementarna klijetka zamijeni prema izrazu

$$J=\begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} \Rightarrow f(J)=\begin{bmatrix} f(\lambda) & f'(\lambda) & \frac{1}{2!}f''(\lambda) & \frac{1}{3!}f'''(\lambda) \\ 0 & f(\lambda) & f'(\lambda) & \frac{1}{2!}f''(\lambda) \\ 0 & 0 & f(\lambda) & f'(\lambda) \\ 0 & 0 & 0 & f(\lambda) \end{bmatrix}. \tag{90}$$

Primjer. Neka je $A=\begin{bmatrix} 0 & 4 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$. Karakteristični polinom je $\lambda^2-4\lambda+4$ s dvostrukom nul-točkom $\lambda=2$. Postoji samo jednodimenzijski svojstveni potprostor kojeg razapinje svojstveni vektor $e_1=\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$. Za matricu S uzima se $S=\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ i za nju vrijedi $S^{-1}AS=$ $=J$, gdje je $J=\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$. Tada je, npr.

$$A^{100}=SJ^{100}S^{-1}=\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2^{100} & 100\cdot 2^{99} \\ 0 & 2^{100} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}. \tag{91}$$

TENZORI

Poopćenjem vektorskog i matričnog računa dolazi se do tenzorskog računa. Pri opisu skalarnih fizikalnih veličina (masa, temperatura, energija, tlak, potencijal,...) dovoljan je jedan podatak. Vektorske veličine (sila, brzina, ubrzanje, električno polje,...) opisuju se, u odabranom koordinatnom sustavu, pomoću tri podatka, tri koordinate vektora u tom sustavu. Pritom, poznavajući koordinate vektora u jednom sustavu, mogu se odrediti i koordinate tog vektora u bilo kojem drugom sustavu.

Uz skalarne i vektorske veličine, neke fizikalne pojave zahtijevaju u svom opisu i složenije veličine, nazvane *tenzorima*, koje su u koordinatnom sustavu opisane podatcima indeksiranim nekolicinom indeksâ. Tipičan je primjer tenzor inercije J_{ij}, $i,j=$ $=1,2,3$.

Sastavni je dio tenzorskog računa i pravilo transformacije tenzora pri promjeni koordinatnih sustava. Također, tenzorski račun u svom formalizmu upotrebljava specijalne oznake i konvencije karakteristične za taj račun.

Biortogonalne baze. Neka je X n-dimenzijski vektorski prostor. Sa X^* označuje se prostor linearnih funkcionala na X, tj. prostor linearnih preslikavanja s X u pripadno polje **K**. Djelovanje funkcionala $y^*\in X^*$ na elementu $x\in X$ označuje se s $\langle y^*|x\rangle$. Za svaku bazu $(e_1,...,e_n)$ postoji *biortogonalna baza* $(e^1,...,e^n)$ u prostoru X^*, za koju vrijedi $\langle e^i|e_j\rangle=\delta^i_j=1$, ako je $i=j$, odnosno 0, ako je $i\neq j$.

Kontravarijantni i kovarijantni vektori. Vektori su najjednostavniji primjeri tenzora. Svaki vektor $x\in X$ može se prikazati u obliku $x=x^1e_1+...+x^ne_n$. Time je svakom vektoru x u bazi (e) pridružen sustav od n brojeva x^k. Neka je $e_{1'},...,e_{n'}$ neka druga (tzv. crtana) baza (označavanje koordinata vektora s gornjim indeksima te crticama nad indeksom, a ne nad vektorom, neke su od specijalnih oznaka tenzorskog računa). Neka je $e^{1'},...,e^{n'}$ njoj biortogonalna baza, a $x^{1'},...,x^{n'}$ koordinate vektora x u novoj bazi. Neka su S i T matrice prijelaza između dviju baza, $T=S^{-1}$. Tada je

$$e_{k'}=Se_k=s_{1k}e_1+...+s_{nk}e_n, \tag{92a}$$

$$e_k=Te_{k'}=t_{1k}e_{1'}+...+t_{nk}e_{n'}. \tag{92b}$$

Tada su koordinate vektora x u novoj bazi

$$x^{k'}=t_{k1}x^1+...+t_{kn}x^n. \tag{93}$$

S druge strane, element $y^*\in X^*$ ima prikaz $y^*=y_1e^1+...+y_ne^n$ i pri prijelazu u novu, crtanu bazu, njegove se koordinate mijenjaju:

$$y_{k'}=s_{1k}y_1+...+s_{nk}y_n. \tag{94}$$

Dakle, koordinate vektora iz X^* mijenjaju se na isti način kao i baza u X. Zato se takvi vektori nazivaju *kovarijantnim*. S druge strane, koordinate vektora iz X mijenjaju se pomoću matrice T^T, dakle pomoću k-tog retka matrice S^{-1}, dok se vektori mijenjaju pomoću k-tog stupca matrice S. Zato se vektori iz prostora X nazivaju *kontravarijantnim*.

Valja primijetiti da vrijedi

$$s_{ik}=\langle e_{k'}|e^i\rangle, \quad t_{ki}=\langle e_i|e^{k'}\rangle. \tag{95}$$

Tako se transformacije koordinata mogu zapisati u obliku

$$x^{k'}=\sum_{i=1}^{n}x^i\langle e_i|e^{k'}\rangle, \quad y_{k'}=\sum_{i=1}^{n}\langle e_{k'}|e^i\rangle y_i. \tag{96}$$

U tenzorskom se računu u takvim situacijama izostavlja znak zbrajanja po dvostrukom indeksu, koji se nalazi jednom u donjem i jednom u gornjem položaju, pa se taj izraz piše u obliku

$$x^{k'}=x_i\langle e_i|e^{k'}\rangle, \quad y_{k'}=\langle e_{k'}|e^i\rangle y_i. \tag{97}$$

Tenzori. Prirodnim poopćenjem navedenog razmatranja dolazi se do pojma tenzora. *Tenzor tipa* (p,q), q puta kontravarijantan i p puta kovarijantan, jest veličina A kojoj u svakoj bazi (e) prostora X odgovara sustav od n^{p+q} brojeva $A^{i_1...i_q}_{j_1...j_p}$ koji se nazivaju koordinate tenzora. Pritom su koordinate $A^{i_1...i_q}_{j_1...j_p}$ i $A^{i'_1...i'_q}_{j'_1...j'_p}$ koje odgovaraju istom tenzoru A u dvije baze (e) i (e') povezane relacijom

$$A^{i'_1...i'_q}_{j'_1...j'_p}=\langle e_{j'_1}|e^{\alpha_1}\rangle\cdots\langle e_{j'_p}|e^{\alpha_p}\rangle A^{\beta_1...\beta_q}_{\alpha_1...\alpha_p}\langle e_{\beta_1}|e^{i'_1}\rangle\cdots\langle e_{\beta_q}|e^{i'_q}\rangle, \tag{98}$$

a podrazumijeva se zbrajanje po dvostrukim indeksima. Broj $p+q$ naziva se *valencija* tenzora A.

Dva su tenzora jednaka ako su istog tipa i ako su im u nekoj bazi, pa onda i u svima, koordinate jednake. Tenzori istog tipa mogu se zbrajati na prirodan način, po svojim koordinatama. Umnožak dvaju tenzora tipa (p',q') i (p'',q'') je tenzor tipa $(p'+p'',q'+q'')$ koji se dobije množenjem odgovarajućih koordinata.

Primjeri tenzora. 1) Koordinate svakog vektora iz X čine tenzor tipa (0,1), tj, koordinate kontravarijantnog vektora čine tenzor koji je jedanput kontravarijantan. Koordinate kovarijantnog vektora iz X^* čine tenzor tipa (1,0), jedanput kovarijantan.

2) Svaki linearni operator inducira tenzor tipa (1,1). Neka je $A:X\to X$ linearan i (e) baza u X. Tada je

$$A^i_j:=\langle A(e_j)|e^i\rangle=\left\langle\sum_{k=1}^{n}a_{kj}e_k|e^i\right\rangle=\sum_{k=1}^{n}a_{kj}\langle e_k|e^i\rangle=a_{ij}. \tag{99}$$

Vidi se da je tenzor jednak matrici operatora A u bazi (e).

3) Skalarnom umnošku u X odgovara 2 puta kovarijantni tenzor $A_{ij}=(e_i|e_j)$, nazvan *kovarijantni metrički tenzor*. Elementi inverzne matrice $[A_{ij}]^{-1}$ definiraju dva puta kontravarijantni tenzor.

LIT.: *A. C. Aitken*, Determinants and Matrices. Edinburgh–London 1949. – *P. R. Halmos*, Finite Dimensional Vector Spaces. Princeton University Press, Princeton 1953. – *D. Faddeev, V. Faddeeva*, Computational Methods of Linear Algebra, San Francisco 1963. – *S. Kurepa*, Konačno-dimenzionalni vektorski prostori i primjene. Tehnička knjiga, Zagreb 1967. – *Ф. Р. Гантмахер*, Теория матриц. Наука, Москва 1988.

N. Elezović