VIBRACIJE, mehaničke oscilacije sustava (konstrukcija, strojeva, vozila i dr.) s malim amplitudama, dok su oscilacije općenito periodično gibanje bilo koje amplitude. Katkad se upotrebljava i naziv *titranje* za vibracije napete strune, štapa, membrane i sl. Proučavanje mehaničkih vibracija ima veliko značenje u svim granama tehnike, npr. u strojarstvu, građevinarstvu, brodogradnji, gradnji zrakoplova, gdje se periodično gibanje tijela ili njihovih dijelova gotovo uvijek zbiva s malim amplitudama. Vibracije se proučavaju unutar grane mehanike koja se naziva *teorija vibracija* ili *teorija oscilacija*.

Vibracije su obično neželjena i štetna pojava. Štetno djeluju na ljude, a u strojevima, vozilima i općenito u konstrukcijama uzrokuju poremećaje u radu i lomove te nepotrebno troše mehaničku energiju. S druge strane, vibracije su katkad i korisne jer su osnova nekih mehaničkih i tehnoloških postupaka, npr. za popuštanje zaostalih naprezanja nakon lijevanja, ili opreme kao što su vibracijska sita, vibracijski konvejeri, strojevi za nabijanje itd. Vibracije se primjenjuju i u geološko-seizmičkim istraživanjima, pri gradnji akustičkih aparata itd.

Proizvodnja zvuka općenito, a glazbe posebno, povezana je s titranjem (vibracijama) štapova, ploča, ljusaka, napetih struna i membrana. Glazbeni instrument lira ima niz točno ugođenih napetih žica koje svojim titranjem proizvode tonove. Prvi graditelji lira morali su imati neka osnovna znanja o titranju napete žice. Kako je lira bila poznata još starim Sumeranima prije više od 4500 godina, može se reći da su proučavanja titranja napete žice stara nekoliko tisuća godina.

Prva poznata sustavna ispitivanja titranja napete žice provodio je grčki filozof i matematičar Pitagora u ←VI. st. na uređaju monokord (sonometar). Pitagora je ispitivao ovisnost visine tona o napetosti i duljini žice i ustanovio da dvostruko dulja žica pri istoj napetosti ima za jednu oktavu niži ton.

Koncem XVI. i početkom XVII. st. M. Mersenne i G. Galilei neovisno su jedan o drugome provodili pokuse titranja napete žice. Galilei je utvrdio da titranja s višom frekvencijom daju i više tonove, te da interval između dva tona ovisi o omjeru frekvencija i da je za oktavu taj omjer 2, a za kvintu 1,5. Ispitivao je gibanje njihala i utvrdio da vrijeme njihanja ovisi o duljini njihala, što je primijenio za mjerenje vremena. J. Sauver je pokušavao proračunati frekvenciju napete žice, ali je to uspjelo tek B. Tayloru 1713. godine. Njegovi rezultati dobro su se slagali s Mersennovim i Galilejevim mjerenjima. J. Sauver i J. Wallis neovisno su jedan o drugome utvrdili da napeta žica može titrati raznim načinima (formama). Sauver je uveo i pojmove osnovne frekvencije i harmonika. J. R. D'Alembert je oko 1750. izveo diferencijalnu jednadžbu titranja žice, a J. Lagrange je 1759. riješio problem određivanja frekvencija titranja u otvorenim i zatvorenim cijevima orgulja. Problem titranja napete žice proučavali su još i poznati matematičari D. Bernoulli, L. Euler te J. B. J. Fourier.

Nakon objavljivanja Hookeova zakona, L. Euler (1744) i D. Bernoulli (1751) izveli su diferencijalnu jednadžbu poprečnog titranja štapa i razmatrali rješenja jednadžbe za male pomake. E. F. F. Chladni je razvio metodu određivanja načina vibriranja (čvornih linija) ploča, pa ga je Francuska akademija znanosti pozvala 1809. da demonstrira svoj postupak. Potom je ista akademija raspisala nagradni natječaj za matematičko objašnjenje rezultata koje je dobio Chladni. Sophie Germain je 1816. dobila nagradu za izvedenu diferencijalnu jednadžbu titranja ploče, ali nije uspjela ispravno definirati rubne uvjete, što je tek 1850. učinio G. R. Kirchhoff.

J. W. S. Rayleigh je 1877. objavio djelo *Theory of Sound*, u kojem je razradio metodu određivanja osnovne frekvencije konzervativnih sustava pomoću zakona o očuvanju mehaničke energije.

C. G. P. de Laval dao je praktično rješenje za vibriranje neuravnotežena rotirajućeg diska koji je primijenio u gradnji parnih turbina. A. Stodala je proučavao vibracije parnih i plinskih turbina, posebno turbinskih lopatica i znatno pridonio rješenju tog problema. Matematičku teoriju nelinearnih vibracija razvili su koncem XIX. st. J. H. Poincaré i A. M. Ljapunov. Analizu titranja štapova i ploča unaprijedili su S. P. Timošenko i R. D. Mindlin, uzimajući u obzir rotacijsku tromost poprečnih presjeka. Po Timošenku je i uveden pojam Timošenkov štap. Sustavan prikaz teorije stohastičkih vibracija dali su S. H. Crandall, W. D. Mark i J. D. Robson.

TEORIJSKE OSNOVE ANALIZE VIBRACIJA

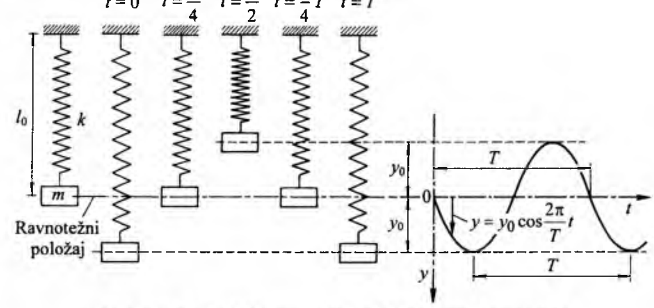
Mehaničke vibracije jesu ponovljena gibanja mehaničkih sustava oko nekog srednjeg, najčešće ravnotežnog, položaja. Jednostavan primjer vibracija jest gibanje tijela mase m koje visi na opruzi konstante k (sl. 1). Ako se tijelo povuče iz stanja ravnoteže za iznos y_0 i prepusti samo sebi, gibat će se po harmonijskom zakonu:

$$y = y_0 \cos \omega t, \qquad (1)$$

odnosno

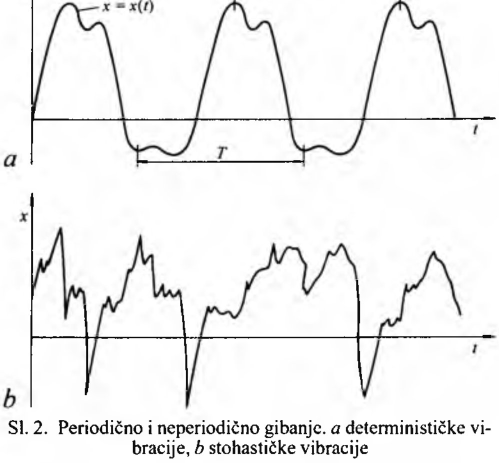
$$y = y_0 \cos \frac{2\pi}{T} t, \qquad (2)$$

gdje je y_0 amplituda, ω kružna frekvencija, t vrijeme, a T vrijeme titraja, tj. vrijeme za koje tijelo napravi jedan puni titraj (v. *Mehanika*, TE 8, str. 25). Vibracije ne moraju biti nužno harmonijske niti periodične (sl. 2). Uz neharmonijske vibracije gibanje se odvija po zakonu različitom od sinusoidnog, ali može biti periodično (determinističke vibracije). Neperiodične vibracije uvijek su i neharmonijske, ne mogu se podijeliti u manje dijelove koji se zatim periodično ponavljaju. Slučajna su pojava i nemaju odgovarajuću matematičku funkciju (stohastičke vibracije).



Sl. 1. Vibracije tijela mase m koje visi na opruzi konstante k

Krutom se tijelu za vrijeme vibriranja određuje položaj pomoću koordinata položaja. Najmanji broj međusobno nezavisnih koordinata kojima su određeni položaji svih tijela u sustavu koji vibrira jesu *stupnjevi slobode*. Položaj jednog tijela općenito je određen sa šest nezavisnih koordinata, pa je to najveći broj stupnjeva slobode s kojima može vibrirati kruto tijelo. S toliko stupnjeva slobode vibrira npr. karoserija automobila, koja se, vezana na osovine kotača pomoću elastičnih i prigušenih članova, promatra kao kruto tijelo. U mehaničkim sustavima u kojima svako tijelo ima jedan stupanj slobode, i to translacijski, tijela se promatraju kao čestice odgovarajućih masa. Sustav može sadržavati i tijela koja vibriraju na rotacijski način (npr. remenice, kotači vozila), kojima je tada umjesto mase odgovarajuća veličina moment tromosti oko osi rotacije, a položaj im je određen kutnom koordinatom. Mehanički sustavi u kojima se tijela promatraju kao da su kruta vibriraju s jednim, dva ili s više stupnjeva slobode, no taj je broj uvijek konačan (vibracije diskretnih sustava). Sustavi s jednim stupnjem slobode jednostavno se matematički opisuju (npr. torzijske vibracije rotora strojeva), no nisu uvijek i tehnički jednostavni. Tako je automobilski motor sa svim svojim pokretnim dijelovima (koljenčasta osovina, ventili, klipovi itd.) složen mehanički sastav, no ima samo jedan stupanj slobode, jer kut zakreta osovine određuje položaj svih ostalih tijela u sustavu.



Sl. 2. Periodično i neperiodično gibanje. *a* determinističke vibracije, *b* stohastičke vibracije

Svako elastično tijelo ima beskonačno mnogo stupnjeva slobode, pa se vibracije takvih tijela promatraju kao *vibracije kontinuuma*. Prilikom takvih vibracija svaka se točka na tijelu giba neovisno o drugim točkama i svakoj točki tijela odgovara druga jednadžba gibanja.

S obzirom na način dovođenja energije u sustav, odnosno na način pobude, vibracije se razvrstavaju na slobodne, prisilne, samouzbudne i parametričke.

Slobodne vibracije nastaju kad se vibracijski sustav izvede iz ravnotežnog stanja i prepusti sam sebi. Tada nema daljeg dovođenja energije sa strane i sustav vibrira tzv. vlastitom frekvencijom, odnosno vlastitim frekvencijama ako sustav ima više stupnjeva slobode.

Prisilne vibracije nastaju djelovanjem uzbudne ili poremećajne sile $F(t)$, koja je funkcija vremena i trajno dovodi energiju u sustav. Poremećaj može biti zadan i gibanjem podloge, što je tzv. *kinematička uzbuda*. Međutim, ta sila nije definirana samo gibanjem podloge nego i svojstvima sustava.

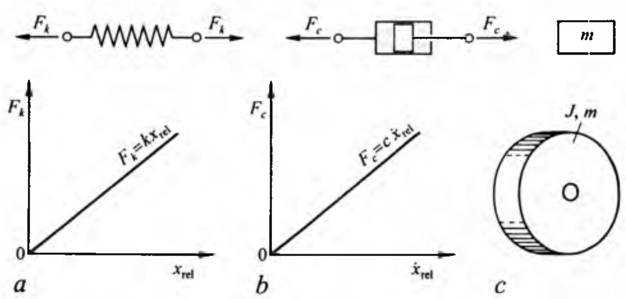
Samouzbudne vibracije nastaju i održavaju se konstantnim dovođenjem energije sa strane. Sila koja proizvodi vibracije nema promjenljiv karakter, nego djeluje stalno u istom smjeru. Primjer za takve vibracije jest titranje žice na violini koje se proizvodi stalnim povlačenjem gudala u jednom smjeru.

Parametričke vibracije nastaju zbog periodične promjene jednog od osnovnih parametara sustava: mase, prigušenja ili konstante elastičnosti.

Prema obliku diferencijalne jednadžbe gibanja vibracije mogu biti *linearne* i *nelinearne*. Ako je karakteristika opruge ili prigušivača nelinearna, diferencijalna jednadžba bit će nelinearna, a time i same vibracije. Analiza nelinearnih vibracija matematički je mnogo složenija, pa se zbog toga, gdje god je to moguće, u proračunima provodi linearizacija, osobito kad su amplitude pomaka malene.

Gotovo se sve pojave vibracija mogu uočiti i proučavati razmatranjem uzdužnih vibracija sustava koji se sastoji od niza masa povezanih međusobno elastičnim i prigušenim elementima. Kako je analiza takvih vibracija jednostavna, vibracije se i proučavaju na takvim sustavima. Kad je to potrebno, analiza vibracija dopunjava se posebnim pojavama fleksijskih, torzijskih i drugih načina vibracija.

Modeliranje vibracijskih sustava. Tijekom slobodnog vibriranja mehaničkog sustava potencijalna energija sustava prelazi u kinetičku i obratno, pri čemu se jedan dio energije rasipa, što postupno smanjuje amplitudu sve dok nakon nekog vremena vibracije potpuno ne prestanu. Svaki realni vibracijski sustav sadrži povratne (elastične, restorativne), prigušne (disipativne) i trome (inercijske) elemente (sl. 3). U realnim sustavima jedan te isti fizikalni element može imati sva tri svojstva. Tako npr. opruga ima elastično svojstvo, tj. može akumulirati potencijalnu energiju, odnosno može stvarati povratnu ili restorativnu silu. Međutim, stvarna opruga ima i određenu masu. Osim toga, zbog unutarnjeg trenja materijala i zbog otpora zraka opruga stvara i određeno prigušenje. Prema tome, stvarna opruga ima sva tri svojstva: svojstvo elastičnosti, tromosti i prigušenja. Prevladava svojstvo elastičnosti, a druga su dva svojstva zanemarivo malena. Pri modeliranju vibracijskih sustava upotrebljavaju se elementi koji imaju samo po jedno od tih svojstava.



Sl. 3. Osnovni elementi vibracijskih modela. *a* elastični, *b* prigušni, *c* inercijski model

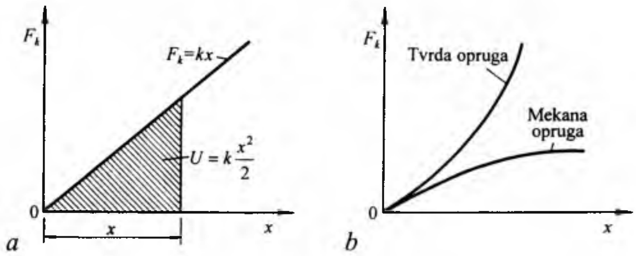
Elastični (restorativni) element služi za akumuliranje potencijalne energije sustava. To su najčešće zaista elastični elementi u obliku raznih opruga, ali to može biti i gravitacijsko polje kao kod njihala, polje centrifugalnih sila itd. Taj se element prikazuje pomoću opruge i, ako nije drukčije naznačeno, smatra se da je opruga linearna, tj. da je sila opruge proporcionalna produljenju:

$$F_k = kx, \tag{3}$$

gdje je F_k sila u opruzi, k konstanta opruge (konstanta krutosti), a x produljenje opruge (sl. 4). Pravac $F_k = kx$ naziva se *karakteristikom opruge*. Površina ispod karakteristike opruge jest potencijalna energija U deformirane opruge koja iznosi

$$U = k\frac{x^2}{2}. \tag{4}$$

Karakteristika nelinearne opruge zadaje se dijagramom, a prema porastu sile opruga može biti tvrda ili mekana. Često se za male pomake x takva opruga može smatrati linearnom.



Sl. 4. Karakteristika linearne (*a*) i nelinearne opruge (*b*)

Tromi (inercijski) element akumulira kinetičku energiju sustava. Prikazuje se pomoću utega mase m. Ako je relevantno i rotacijsko gibanje, može se prikazati pomoću diska koji ima moment tromosti J.

Prigušni (disipativni) element modelira rasipanje ili disipaciju mehaničke energije. Prigušenje nastaje zbog unutarnjeg ili vanjskog trenja, odnosno otpora nekonzervativnih ili disipativnih sila. Unutarnje trenje nastaje pri međusobnom pomicanju čestica materijala pri deformiranju. Vanjsko trenje može biti suho, viskozno ili općenito otpor fluida. Viskozno trenje ovisi o prvoj potenciji relativne brzine $\dot{x}_{rel}$ površina u dodiru. Otpor fluida ovisi o drugoj potenciji relativne brzine. Općenito sila prigušenja iznosi

$$F_c = c\dot{x}^n_{rel}, \tag{5}$$

gdje je c faktor prigušenja, a n neki eksponent. Pri suhom trenju je $n=0$, pri viskoznom $n=1$, pri otporu fluida $n=2$. U realnim je vibracijskim sustavima $n \approx 1$, pa se zbog toga, a i radi pojednostavljenja matematičke analize, uzima da je $n=1$, tj. pretpostavlja se viskozno trenje. Simbolički se element takva trenja prikazuje pomoću viskoznog prigušivača koji se sastoji od klipa i cilindra u kojem se nalazi ulje.

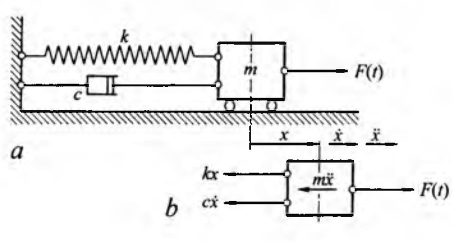
Uzbudne (poremećajne) sile djeluju na vibracijski model i uzrokuju prisilne vibracije. Vrlo česte su i za analizu vrlo jednostavne tzv. harmonijske sile, koje se mijenjaju po zakonu sinusa ili kosinusa:

$$F(t) = F_0 \cos(\omega t - \varphi_0), \tag{6}$$

gdje je F_0 amplituda, ω uzbudna kružna frekvencija, a φ_0 početna faza. Ako je uzbudna sila periodična ali nije harmonijska, može se razvojem u Fourierov red prikazati kao zbroj harmonijskih sila. Uzrok uzbude može biti i podloga kao prilikom potresa ili vožnje automobila po hrapavu putu. To je tzv. kinematička uzbuda. Kod rotirajućih dijelova česta je i centrifugalna uzbuda. Uzbuda je deterministička ako je periodična i unaprijed poznata, a stohastička ako je potpuno proizvoljna i nije unaprijed poznata.

Vibracije sustava s jednim stupnjem slobode

Jednostavan model vibracijskog sustava s jednim stupnjem slobode (sl. 5) sastoji se od tijela mase m koje klizi po podlozi bez trenja. Tijelo je za podlogu vezano oprugom konstante k i prigušivačem koji ima faktor prigušenja c. Na oslobođeno tijelo djeluje sila opruge $F_k = kx$, prigušna sila $F_c = c\dot{x}$, sila inercije $F_i = m\ddot{x}$ te



Sl. 5. Model vibracijskog sustava s jednim stupnjem slobode. *a* sustav, *b* sile koje djeluju na oslobođeno tijelo mase *m*

aktivna poremećajna sila $F(t)$. Radi što jednostavnije analize uzima se da se sila mijenja po harmonijskom zakonu:

$$F(t)=F_0\cos\omega t, \tag{7}$$

gdje je F_0 amplituda poremećajne sile, a ω uzbudna ili poremećajna frekvencija. Tada je jednadžba gibanja tijela

$$m\ddot{x}+c\dot{x}+kx=F_0\cos\omega t. \tag{8}$$

Slobodne vibracije bez prigušenja. Ako na sustav ne djeluje poremećajna sila i ako je faktor prigušenja c zanemarivo malen, izraz (8) glasi

$$\ddot{x}+\frac{k}{m}x=0. \tag{9}$$

Omjer k/m jednak je kvadratu *vlastite* (*prirodne*) kružne frekvencije vibracija bez prigušenja ($k/m=\omega_n^2$), koja se izražava u radijanima u sekundi (rad/s). Opće rješenje diferencijalne jednadžbe (9) daje izraz za pomak mase m tijekom vibriranja i glasi

$$x=C_1\cos\omega_n t+C_2\sin\omega_n t. \tag{10}$$

Uz početne uvjete za pomak $x(0)=x_0$ i brzinu $\dot{x}(0)=v_0$, izraz (10) prelazi u

$$x=x_0\cos\omega_n t+\frac{v_0}{\omega}\sin\omega_n t, \tag{11}$$

odnosno

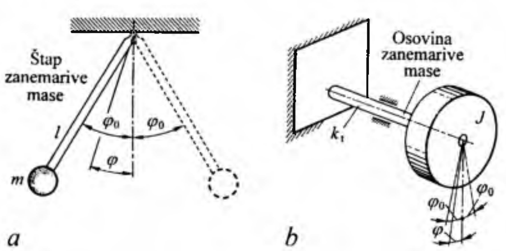
$$x=\sqrt{x_0^2+\left(\frac{v_0}{\omega_n}\right)^2}\cos(\omega_n t-\varphi_0), \tag{12}$$

gdje je φ_0 početna faza zadana izrazom $\tan\varphi_0=v_0/(\omega x_0)$.

Vibracijski se sustav prema (11) giba po harmonijskom zakonu kad se poremeti i prepusti samom sebi. Vlastita frekvencija takvih vibracija ovisi samo o parametrima sustava, tj. o konstanti k i masi m, a ne ovisi o načinu na koji je sustav doveden u gibanje. Prema tome, vlastita je frekvencija unutarnje svojstvo sustava i ne može se promijeniti a da se ne promijeni sam sustav. Vlastita ili kružna frekvencija ω_n razlikuje se od frekvencije f, koja izražava broj titraja u sekundi (herc, Hz). Te su frekvencije povezane izrazom

$$f=\frac{\omega_n}{2\pi}=\frac{1}{T}. \tag{13}$$

Kvadrat vlastite frekvencije slobodnih, neprigušenih vibracija nalazi se kao koeficijent uz nederivirani član jednadžbe gibanja, ako je jednadžba tako uređena da je koeficijent uz drugu derivaciju pomaka jednak jedinici. Tako se i određuje vlastita frekvencija ω_n.



Sl. 6. Vibracijski sustavi s jednim stupnjem slobode. *a* matematičko njihalo, *b* torzijski sustav

Matematičko njihalo (sl. 6a) također je sustav s jednim stupnjem slobode, u kojem je povratni element sila teža. Jednadžba gibanja njihala glasi

$$ml^2\ddot{\varphi}+mgl\sin\varphi=0. \tag{14}$$

Za male pomake φ vrijedi da je $\varphi\approx\sin\varphi$, pa se taj izraz svodi na

$$\ddot{\varphi}+\frac{g}{l}\varphi=0. \tag{15}$$

Odatle je vlastita frekvencija matematičkog njihala

$$\omega_n=\sqrt{\frac{g}{l}}. \tag{16}$$

Za torzijski sustav (sl. 6b) jednadžba gibanja glasi

$$\ddot{\varphi}+\frac{k_t}{J}\varphi=0, \tag{17}$$

gdje je J dinamički moment tromosti diska, a k_t je torzijska konstanta krutosti osovine. Vlastita je frekvencija slobodnih vibracija takva sustava

$$\omega_n=\sqrt{\frac{k_t}{J}}. \tag{18}$$

Povratni element je osovina s konstantom krutosti

$$k_t=\frac{GI_p}{l}, \tag{19}$$

gdje je G modul smičnosti materijala osovine, I_p polarni moment tromosti osovine, a l duljina osovine.

Slobodne vibracije s prigušenjem. Prilikom takvih vibracija nema poremećajne sile, a prema (8) odgovarajuća je jednadžba gibanja

$$m\ddot{x}+c\dot{x}+kx=0. \tag{20}$$

Pripadna karakteristična jednadžba glasi

$$mr^2+cr+k=0, \tag{21}$$

a o njezinim korijenima r_1 i r_2 ovisi kakvo će biti gibanje. Ti su korijeni

$$r_{1,2}=-\frac{c}{2m}\pm\sqrt{\left(\frac{c}{2m}\right)^2-\frac{k}{m}}=-\lambda\pm\sqrt{\lambda^2-\omega_n^2}, \tag{22}$$

gdje je λ konstanta prigušenja.

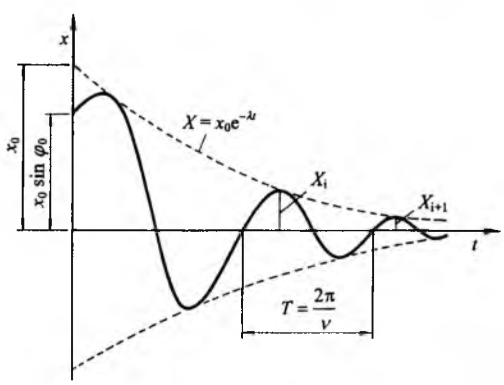
Pri *slabom prigušenju* ($c<2\sqrt{mk}$) korijeni r_1 i r_2 su konjugirano kompleksni, jer je $\lambda<\omega_n$, pa je

$$r_{1,2}=-\lambda\pm\mathrm{i}\sqrt{\omega_n^2-\lambda^2}=-\lambda\pm\mathrm{i}\nu, \tag{23}$$

gdje je ν kružna frekvencija prigušenih slobodnih vibracija, a ima jedinicu s^{-1}. Rješenje jednadžbe gibanja ima oblik

$$x=x_0\,\mathrm{e}^{-\lambda t}\sin(\nu t+\varphi_0). \tag{24}$$

Konstante x_0 i φ_0 određuju se iz početnih uvjeta. Vibracije su pseudoperiodične, jer se nakon perioda $T=2\pi/\nu$ (pseudoperiod) doduše ponavlja ciklus, ali sa smanjenim amplitudama (sl. 7).



Sl. 7. Ovisnost promjene pomaka x tijela mase m o vremenu pri prigušenim vibracijama

Mjera tog smanjivanja jest omjer dviju uzastopnih amplituda različitog predznaka ili dviju uzastopnih amplituda istog predznaka. Za dvije uzastopne amplitude istog predznaka taj će omjer biti

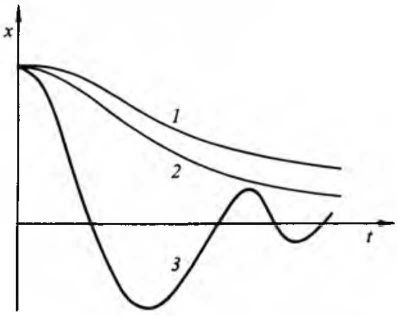
$$\frac{X_i}{X_{i+1}}=\mathrm{e}^{-\lambda T} \tag{25}$$

i taj je omjer konstantan. Pritom je $\ln|X_i/X_{i+1}| = \lambda T$ *logaritmički dekrement* koji pokazuje brzinu prigušivanja vibracija. Iz eksperimentalno snimljenog dijagrama $x(t)$ određuje se logaritmički dekrement i konstanta prigušenja λ, odnosno faktor prigušenja c.

Ako je *prigušenje jako* ($c > 2\sqrt{mk}$), korijeni r_1 i r_2 su realni i različiti, a $\lambda > \omega_n$. Rješenje diferencijalne jednadžbe gibanja glasi

$$x = x_0\, e^{-\lambda t} \sinh(\nu t + \varphi_0). \tag{26}$$

I ovdje se x_0 i φ_0 određuju iz početnih uvjeta, a gibanje je neperiodično, tj. nema vibracija. Funkcija pomaka $x(t)$ asimptotski se približava nuli (sl. 8).



Sl. 8. Neperiodično gibanje pri jakom (*1*), kritičnom (*2*) i slabom prigušenju (*3*) uz $\varphi_0 = 0$

Kritično prigušenje ($c = c_{kr} = 2\sqrt{mk}$) granični je slučaj između prigušenih vibracija i neperiodičnog gibanja. Tada je $\lambda = \omega_n$, a $\nu = 0$. Karakteristična jednadžba ima samo jedan korijen $r_1 = r_2 = -\lambda$, a rješenje diferencijalne jednadžbe gibanja glasi

$$x = (x_0 + ct)e^{-\lambda t}. \tag{27}$$

Gibanje još uvijek nema značajku vibracija, već se kao i pri jakom prigušenju pomak $x(t)$ asimptotski približava nuli. Je li neko prigušenje jako (natkritično), kritično ili slabo (potkritično) pokazuje *faktor prigušenja*:

$$\zeta = \frac{c}{c_{kr}} = \frac{c}{2\sqrt{mk}}, \tag{28}$$

koji je pri jakom prigušenju veći, a pri slabom manji od jedinice. Za kritično je prigušenje $\zeta = 1$.

U mnogim strojevima i konstrukcijama relativno je prigušenje maleno, reda vrijednosti 0,1 ili manje. Ako je $\zeta = 0{,}1$, vlastite frekvencije prigušenih i neprigušenih vibracija neznatno se razlikuju (~0,5%). Zbog toga se vlastite frekvencije mogu odrediti s dovoljnom točnošću, zanemarujući prigušenje kad je ono manje od 0,1. Međutim, već i tako maleno prigušenje uzrokuje naglo smanjenje amplituda. Ako je $\zeta = 0{,}1$, logaritmički je dekrement $\lambda T = 0{,}631$, a amplituda X_{10} nakon desetog perioda iznosi $X_{10} = X_1\, e^{-6{,}31} = 0{,}0018 X_1$. Prema tome, malo prigušenje neznatno utječe na vlastitu frekvenciju, ali naglo smanjuje amplitudu i uvjetuje brzo zamiranje vibracija.

Prisilne vibracije bez prigušenja. Poremećajna sila je $F_0 \neq 0$, a faktor prigušenja $c = 0$, pa se (8) svodi na

$$m\ddot{x} + kx = F_0 \cos\omega t. \tag{29}$$

Opće rješenje te diferencijalne jednadžbe sastoji se od općeg rješenja homogenog dijela i jednog partikularnog rješenja:

$$x(t) = C_1 \cos\omega_n t + C_2 \sin\omega_n t + \frac{F_0}{k - m\omega^2}\cos\omega t. \tag{30}$$

Uz početne uvjete $x(0) = x_0$ i $\dot{x}(0) = v_0$, izraz (30) prelazi u

$$x(t) = \left(x_0 - \frac{F_0}{k - m\omega^2}\right)\cos\omega_n t + \frac{v_0}{\omega_n}\sin\omega_n t + \frac{F_0}{k - m\omega^2}\cos\omega t. \tag{31}$$

Prva dva člana predstavljaju titranje vlastitom frekvencijom ω_n, a treći prisilnom (uzbudnom) frekvencijom ω. Vlastite vibracije postupno zamiru i preostaju samo vibracije prisilnom frekvencijom. Zbog toga se prve nazivaju prijelazne ili tranzientne, a druge ustaljene ili stacionarne. Ustaljene vibracije imaju amplitudu

$$X = \frac{F_0}{k - m\omega^2} = \frac{\frac{F_0}{k}}{1 - \frac{m}{k}\omega^2}, \tag{32}$$

odnosno

$$X = \frac{x_{st}}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}, \tag{33}$$

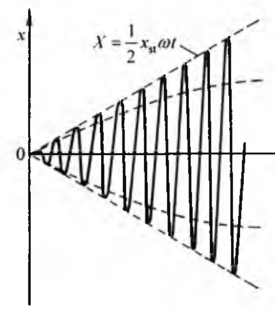
gdje je $x_{st} = F_0/k$ statički pomak mase m pod djelovanjem konstantne sile F_0. Vrijednost amplitude ustaljenih vibracija ovisi o omjeru uzbudne i vlastite frekvencije ω/ω_n. Kad se ω približava ω_n, tada X teži beskonačnosti. Ta se pojava naziva *rezonancija*. Očito je da masa ne može trenutno postići vrlo veliku amplitudu; amplituda se postupno povećava od nule prema velikim vrijednostima (sl. 9). Podrobnija bi analiza pokazala da je taj porast linearan:

$$X = \frac{1}{2}\cdot\frac{F_0}{k}\omega t = \frac{1}{2}x_{st}\,\omega t. \tag{34}$$

U realnim sustavima, zbog prisutnosti trenja, porast amplitude ne teži beskonačnosti, nego se asimptotski približava nekoj konačnoj vrijednosti. Omjer dinamičke i statičke amplitude iznosi

$$\frac{X}{x_{st}} = \frac{X}{\frac{F_0}{k}} = \frac{1}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}. \tag{35}$$

Na temelju tog izraza može se zaključiti da su X i x_{st} istog predznaka ako je $\omega < \omega_n$, tj. dinamički se pomak zbiva u smjeru djelovanja sile, masa titra u fazi s poremećajnom silom. Nasuprot tome, ako je $\omega > \omega_n$, predznaci X i x_{st} su suprotni, pa masa vibrira protufazno sa silom. Kad sila djeluje udesno, masa ima pomak ulijevo i obratno.

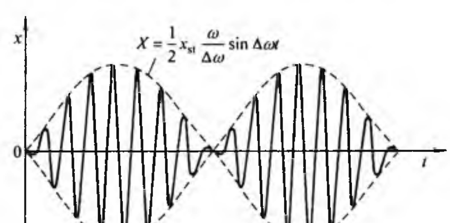


Sl. 9. Porast rezonantne amplitude s vremenom prilikom prisilnih vibracija bez prigušenja

Kad se ω i ω_n neznatno razlikuju ($\omega_n - \omega = 2\Delta\omega$, $\omega_n + \omega \approx 2\omega$), jednadžba gibanja, uz početne uvjete $x(0) = 0$ i $\dot{x}(0) = 0$, glasi

$$x(t) = \frac{1}{2}x_{st}\frac{\omega}{\Delta\omega}\sin\Delta\omega t + \sin\omega t. \tag{36}$$

Tada sustav vibrira po harmonijskom zakonu prisilnom frekvencijom ω, ali se amplituda titranja mijenja po sinusnom zakonu (sl. 10). Takav način vibriranja naziva se *treptanje* (engl. beating).



Sl. 10. Vibriranje sustava uz neznatnu razliku između vlastite i uzbudne frekvencije (treptanje)

Apsolutna vrijednost omjera X/x_{st} naziva se *faktor uvećanja* (magnifikacije):

$$M = \left|\frac{X}{x_{\mathrm{st}}}\right| = \frac{1}{\left|1-\left(\frac{\omega}{\omega_{\mathrm{n}}}\right)^2\right|}. \quad (37)$$

U elektronici se umjesto izraza faktor uvećanja upotrebljava izraz *faktor amplifikacije*.

Prisilne vibracije s prigušenjem. Za sustav sa slike 5 diferencijalna jednadžba gibanja (8) ima opće rješenje koje se sastoji od rješenja homogenog dijela $x_{\mathrm{h}}(t)$ i jednog partikularnog integrala $x_{\mathrm{p}}(t)$:

$$x(t) = x_{\mathrm{h}}(t) + x_{\mathrm{p}}(t). \quad (38)$$

Homogeno rješenje $x_{\mathrm{h}}(t)$ dano je izrazom (24). Može se pokazati da je

$$x_{\mathrm{p}}(t) = X\cos(\omega t - \varphi), \quad (39)$$

gdje je

$$X = \frac{F_0}{\sqrt{(k-m\omega^2)^2 + (c\omega)^2}}, \quad \tan\varphi = \frac{c\omega}{k-m\omega^2}. \quad (40)$$

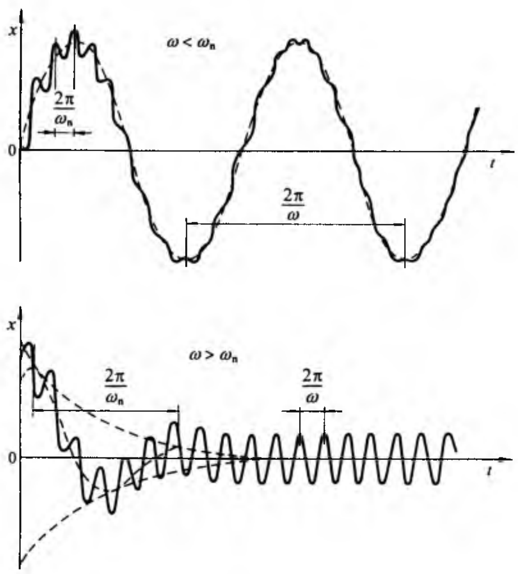
Ako se uzme u obzir da je $k/m = \omega_{\mathrm{n}}^2$, da je $F_0/k = x_{\mathrm{st}}$ i da je $\zeta = c/c_{\mathrm{kr}} = c/(2\sqrt{mk})$, tada je

$$X = \frac{x_{\mathrm{st}}}{\sqrt{\left[1-\left(\frac{\omega}{\omega_{\mathrm{n}}}\right)^2\right]^2 + \left[2\zeta\frac{\omega}{\omega_{\mathrm{n}}}\right]^2}}, \quad \tan\varphi = \frac{2\zeta\omega}{1-\left(\frac{\omega}{\omega_{\mathrm{n}}}\right)^2}. \quad (41)$$

Potpuno opće rješenje tada glasi

$$x(t) = x_0\,\mathrm{e}^{-\lambda t}\sin(\nu t + \varphi_0) + X\cos(\omega t + \varphi), \quad (42)$$

gdje su x_0 i φ_0 konstante integracije. Karakter prijelaznih vibracija ovisi o omjeru $\omega/\omega_{\mathrm{n}}$. Ako je $\omega < \omega_{\mathrm{n}}$, sustav će u prijelaznom odsječku vibrirati vlastitom frekvencijom ω_{n} uz dodatne treptaje frekvencije ω. Obrnuto, kada je $\omega > \omega_{\mathrm{n}}$, izraženije su vibracije s uzbudnom frekvencijom ω (sl. 11).

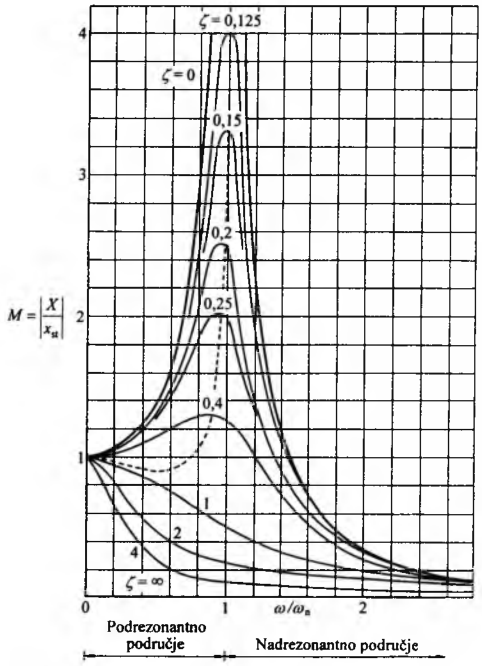


Sl. 11. Pomak x prilikom prisilnih vibracija u prijelaznom odsječku vremena (prijelazne vibracije)

Kada se vibracije ustale sustav vibrira uzbudnom frekvencijom ω, s amplitudom koja ovisi o prigušenju. Ta se amplituda izražava bezdimenzijskim faktorom uvećanja, što je omjer amplitude X i statičkog pomaka x_{st}, tako da iznosi

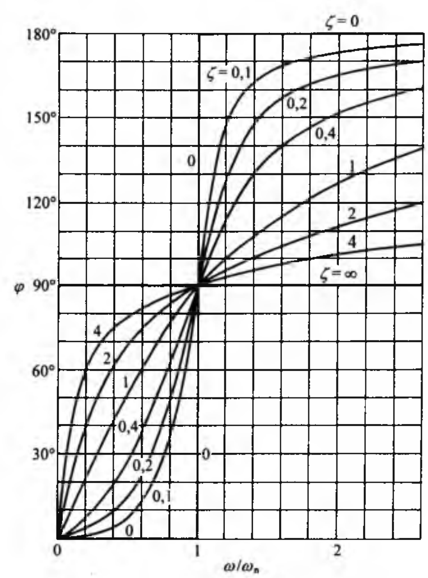
$$M = \left|\frac{X}{x_{\mathrm{st}}}\right| = \frac{1}{\sqrt{\left[1-\left(\frac{\omega}{\omega_{\mathrm{n}}}\right)^2\right]^2 + \left[2\zeta\frac{\omega}{\omega_{\mathrm{n}}}\right]^2}}. \quad (43)$$

U sustavima s malim prigušenjem rezonancija ($X_{\max}$) praktički nastaje kada je $\omega = \omega_{\mathrm{n}}$. Za sustav bez prigušenja amplituda vibriranja bila bi beskonačno velika ($M = \infty$). Što je prigušenje veće, maksimalne se amplitude javljaju pri sve manjim omjerima $\omega/\omega_{\mathrm{n}}$ (crtkana linija na sl. 12). U podrezonantnom području smanjenjem krutosti k rastu amplitude X, jer se time smanjuje i vlastita frekvencija ω_{n}. U nadrezonantnom području smanjenjem krutosti k smanjuje se amplituda vibracija.



Sl. 12. Ovisnost faktora uvećanja M o omjeru $\omega/\omega_{\mathrm{n}}$ za različite faktore relativnog prigušenja ζ

U sustavima s prigušenjem uvijek nastaju vibracije koje manje ili više zaostaju za poremećajem. To je zaostajanje izraženo faznim pomakom φ (sl. 13).

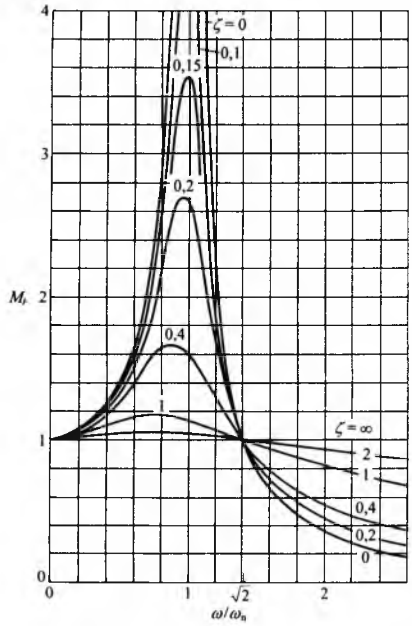


Sl. 13. Ovisnost početne faze φ o omjeru frekvencija $\omega/\omega_{\mathrm{n}}$ za različite faktore relativnog prigušenja ζ

Preko opruge i prigušivača prenosi se na okolinu (temelj, podloga) sila promjenljiva iznosa. Omjer amplitude F_{T} prenesene sile na podlogu i amplitude poremećajne sile F_0 naziva se faktorom prijenosa sile (sl. 14):

$$M_F = \frac{F_{\mathrm{T}}}{F_0} = \sqrt{\frac{1+\left(2\zeta\frac{\omega}{\omega_{\mathrm{n}}}\right)^2}{\left(2\zeta\frac{\omega}{\omega_{\mathrm{n}}}\right)^2 + \left[1-\left(\frac{\omega}{\omega_{\mathrm{n}}}\right)^2\right]^2}}. \quad (44)$$

Porastom relativnog prigušenja prenesena se sila na podlogu smanjuje za $\omega < \omega_n\sqrt{2}$, a povećava za $\omega > \omega_n\sqrt{2}$.

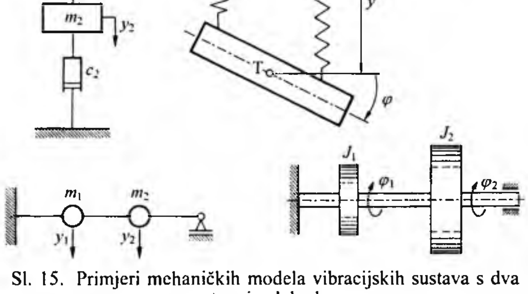


Sl. 14. Ovisnost faktora prijenosa sile M_F o omjeru frekvencija ω/ω_n i relativnom prigušenju ζ

U praksi nije rijedak obrnut slučaj, pri kojem se vibracije podloge prenose na strojeve i uređaje. Pomak podloge i brzina promjene tog pomaka uzrokuju tada vibracije promatranog sustava i djeluju na njega kao *kinematička uzbuda*, kao npr. prilikom vožnje automobila po valovitoj cesti.

Vibracije sustava s dva stupnja slobode

Kada je položaj jednog tijela određen s dva podatka (koordinate) ili kada se sustav sastoji od dvije koncentrirane mase od kojih je svakoj položaj određen jednim podatkom (npr. translacijskim pomakom y ili kutom φ), sustav ima dva stupnja slobode (sl. 15). Jednadžbe gibanja takvih sustava mogu se postaviti na klasičan način ili primjenom Lagrangeovih jednadžbi druge vrste (v. *Mehanika, analitička*, TE 8, str. 56).

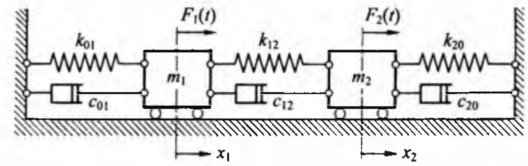


Sl. 15. Primjeri mehaničkih modela vibracijskih sustava s dva stupnja slobode

Primjerice, diferencijalne jednadžbe gibanja za sustav na slici 16 glase

$$\begin{aligned} m_1\ddot{x}_1 + (c_{01}+c_{12})\dot{x}_1 - c_{12}\dot{x}_2 + (k_{01}+k_{12})x_1 - k_{12}x_2 &= F_1(t), \\ m_2\ddot{x}_2 + (c_{12}+c_{20})\dot{x}_1 - c_{12}\dot{x}_1 + (k_{12}+k_{20})x_2 - k_{12}x_1 &= F_2(t), \end{aligned} \tag{45}$$

gdje su c_{01}, c_{12} i c_{20} koeficijenti prigušenja, a k_{01}, k_{12} i k_{20} konstante opruge. Svaki koeficijent, odnosno konstanta, ima dva indeksa koji se odnose na mase koje povezuje. Tako se konstanta k_{12} odnosi na oprugu koja povezuje mase m_1 i m_2. Indeks 0 označava podlogu, pa je c_{20} koeficijent prigušenja prigušivača koji povezuje masu m_2 s podlogom.



Sl. 16. Model uzdužnog vibracijskog sustava s dva stupnja slobode

Izrazi (45) zapisani u matričnom obliku glase

$$[m][\ddot{x}]+[c][\dot{x}]+[k][x]=[F], \tag{46}$$

gdje su $[m]$, $[c]$ i $[k]$ matrice tromosti, prigušenja, odnosno krutosti. One su kvadratne i simetrične, a imaju sljedeće elemente:

$$[m]=\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}, \tag{47}$$

$$[c]=\begin{bmatrix} c_{01}+c_{12} & -c_{12} \\ -c_{12} & c_{12}+c_{20} \end{bmatrix}, \tag{48}$$

$$[k]=\begin{bmatrix} k_{01}+k_{12} & -k_{12} \\ -k_{12} & k_{12}+k_{20} \end{bmatrix}. \tag{49}$$

Matrice pomaka $[x]$ i poremećajnih sila $[F]$ jednostupčane su matrice s elementima

$$[x]=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \tag{50}$$

$$[F]=\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix}. \tag{51}$$

Kad nema poremećajnih sila ($F_1=F_2=0$) i prigušenja ($c_{01}=$ $=c_{12}=c_{20}=0$), vrijede sljedeće jednadžbe gibanja (slobodne, neprigušene vibracije):

$$\begin{aligned} m_1\ddot{x}_1 + (k_{01}+k_{12})x_1 - k_{12}x_2 &= 0, \\ m_2\ddot{x}_2 + (k_{12}+k_{20})x_2 - k_{12}x_1 &= 0, \end{aligned} \tag{52}$$

kojih je rješenje

$$x_1 = X_1\cos(\omega t - \varphi_1) \text{ i } x_2 = X_2\cos(\omega t - \varphi_2). \tag{53}$$

Ta rješenja uvrštena u dvije jednadžbe gibanja daju isto toliki broj homogenih linearnih algebarskih jednadžbi, u kojima su nepoznanice amplitude X_1 i X_2. Amplitude će biti različite od nule (netrivijalno rješenje) samo ako je determinanta koeficijenata algebarskih jednadžbi jednaka nuli, odnosno

$$\begin{aligned} m_1 m_2\omega^4 - [(k_{01}+k_{12})m_2 + (k_{12}+k_{20})m_1]\omega^2 + \\ +[(k_{01}+k_{12})(k_{12}+k_{20}) - k_{12}^2] = 0. \end{aligned} \tag{54}$$

Gornja jednadžba naziva se karakteristična ili frekvencijska jednadžba. Ona ima uvijek dva pozitivna realna rješenja, ω_1^2 i ω_2^2:

$$\begin{aligned} \omega_1^2, \omega_2^2 = \frac{k_{01}+k_{12}}{2m_1} + \frac{k_{12}+k_{20}}{2m_2} \pm \\ \pm\sqrt{\left(\frac{k_{01}+k_{12}}{2m_1} \cdot \frac{k_{12}+k_{20}}{2m_2}\right)^2 - \frac{k_{01}k_{12}+k_{12}k_{20}+k_{01}k_{20}}{m_1 m_2}}. \end{aligned} \tag{55}$$

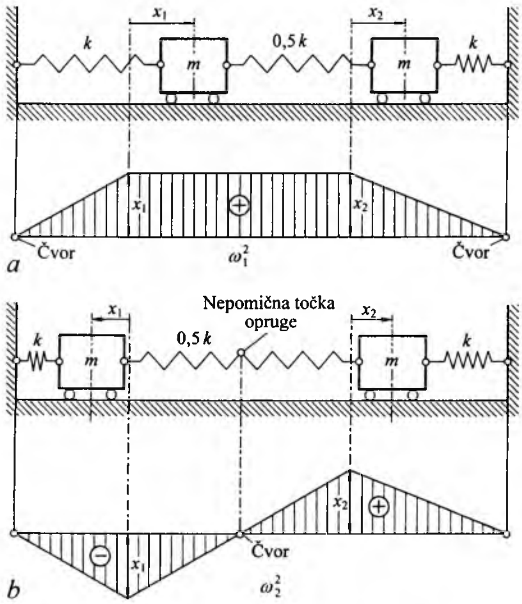
Prema tome, sustav s dva stupnja slobode ima općenito dvije različite vlastite frekvencije ω_1 i ω_2. Uvijek se uzima da je $\omega_1 < \omega_2$.

Kojom će od te dvije frekvencije sustav vibrirati ovisi o početnim uvjetima.

Jednadžbe gibanja su homogene pa se pomoću njih mogu odrediti samo omjeri amplituda:

$$\frac{X_2}{X_1}=\frac{-m_1\omega^2+k_{01}+k_{12}}{k_{12}}=\frac{k_{12}}{-m_2\omega^2+k_{12}+k_{20}}, \tag{56}$$

ali ne i njihove vrijednosti. Svakoj vlastitoj frekvenciji ω_1 i ω_2 odgovara pripadni omjer X_2/X_1 koji se naziva *osnovni način vibriranja*. Sustav s dva stupnja slobode ima dvije vlastite frekvencije, pa će imati i dva osnovna načina vibriranja. Općenito, sustav s n stupnjeva slobode ima n vlastitih frekvencija i n osnovnih načina vibriranja. Ako se sustavu narinu pomaci u obliku prvog osnovnog načina, on će vibrirati s prvom vlastitom frekvencijom. Ako početni uvjeti odgovaraju drugom načinu vibriranja, sustav će vibrirati s drugom vlastitom frekvencijom itd. Kad su početni uvjeti proizvoljni, treba ih rastaviti na osnovne načine posebnim postupkom. Npr. ako je $m_1=m_2=m$, $k_{01}=k_{20}=k$ i $k_{12}=0{,}5\,k$ (simetričan sustav), bit će $\omega_1^2=k/m$ i $\omega_2^2=2\,k/m$. Pri vlastitoj frekvenciji odgovara prvi način vibriranja $X_2/X_1=1$ (istofazne vibracije), dok je za vibracije s drugom frekvencijom $X_2/X_1=-1$ (protufazne vibracije). U drugom se slučaju osim krajnjih nepomičnih točaka (čvorova) pojavljuje dodatni nepomični čvor između obiju masa (sl. 17), pa su to prividno dva odvojena, nezavisna sustava, svaki s po jednom masom između opruga krutosti k.

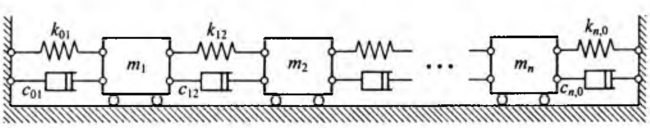


Sl. 17. Prikaz slobodnih neprigušenih vibracija simetričnog sustava s dva stupnja slobode. *a* prvi način vibriranja ($\omega_1^2=k/m$, mase vibriraju istofazno), *b* drugi način vibriranja ($\omega_2^2=2\,k/m$, protufazne vibracije)

Za prisilne i prigušene vibracije s dva stupnja slobode, rješenja se sastoje, kao i za sustav s jednim stupnjem slobode od homogenog i partikularnog dijela. Kada je poremećajna frekvencija jednaka jednoj od vlastitih frekvencija, nastaje rezonancija i u neprigušenim sustavima amplitude postaju beskonačno velike. Sustavi s prigušenjem imaju tada maksimalne amplitude, što je posebno izraženo kada se poremećajna frekvencija poklopi s nižom vlastitom frekvencijom.

Vibracije sustava s konačnim brojem stupnjeva slobode

Vibracijskom sustavu koji ima n stupnjeva slobode odgovara isto toliki broj jednadžbi gibanja. Za uzdužni sustav (sl. 18) odgovarajuće jednadžbe glase



Sl. 18. Model uzdužnog vibracijskog sustava s konačnim brojem stupnjeva slobode

$$m_1\ddot{x}_1+(c_{01}+c_{12})\dot{x}_1-c_{12}\dot{x}_2+(k_{01}+k_{12})x_1-k_{12}x_2=F_1(t),$$

$$m_2\ddot{x}_2-c_{12}\dot{x}_1+(c_{12}+c_{23})\dot{x}_2-c_{23}\dot{x}_3-k_{12}x_1+$$
$$+(k_{12}+k_{23})x_2-k_{23}x_3=F_2(t)$$

$$m_n\ddot{x}_n-c_{n-1,n}\dot{x}_{n-1}+(c_{n-1,n}+c_{n,0})\dot{x}_n-k_n\ddot{x}_{n-1}+$$
$$+(k_{n-1,n}+k_{n,0})x_n=F_n(t), \tag{57}$$

odnosno u matričnom obliku

$$[m][\ddot{x}]+[c][\dot{x}]+[k][x]=[F], \tag{58}$$

gdje je $[m]$ matrica tromosti, $[c]$ matrica prigušenja i $[k]$ matrica krutosti. Te su matrice dane izrazima

$$[m]=\begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & m_2 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & m_3 & \cdots & 0\\ \vdots & & & & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & 0 & m_n\end{bmatrix}, \tag{59}$$

$$[c]=\begin{bmatrix} (c_{01}+c_{12}) & -c_{01} & 0 & \cdots & 0\\ -c_{12} & (c_{12}+c_{23}) & -c_{23} & \cdots & 0\\ 0 & -c_{23} & (c_{23}+c_{34}) & \cdots & 0\\ \vdots & & & & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & -c_{n-1,n} & (c_{n-1,n}+c_{n,0})\end{bmatrix}, \tag{60}$$

$$[k]=\begin{bmatrix} (k_{01}+k_{12}) & -k_{01} & 0 & \cdots & 0\\ -k_{12} & (k_{12}+k_{23}) & -k_{23} & \cdots & 0\\ 0 & -k_{23} & (k_{23}+k_{34}) & \cdots & 0\\ \vdots & & & & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & -k_{n-1,n} & (k_{n-1,n}+k_{n,0})\end{bmatrix}. \tag{61}$$

Matrica tromosti je dijagonalna, dok su matrica prigušenja i matrica krutosti pojasne matrice i simetrične.

U sustavima s više stupnjeva slobode često se rabe poopćene koordinate q_i (v. *Mehanika, analitička*, TE 8, str. 56), pa diferencijalne jednadžbe gibanja tada glase

$$[m][\ddot{q}]+[c][\dot{q}]+[k][q]=[Q], \tag{62}$$

gdje su $[q]$ i $[Q]$ jednostupčane matrice poopćenih pomaka, odnosno poopćenih sila:

$$[q]=\begin{bmatrix} q_1\\ q_2\\ \vdots\\ q_n\end{bmatrix},\quad [Q]=\begin{bmatrix} Q_1\\ Q_2\\ \vdots\\ Q_n\end{bmatrix}. \tag{63}$$

U tom slučaju matrice $[m]$, $[c]$ i $[k]$ mogu biti popunjene, tj. nisu nužno dijagonalne, odnosno pojasne.

Analiza vibracija sustava s n stupnjeva slobode analogna je analizi sustava s dva stupnja slobode. Sustav koji ima n stupnjeva slobode ima i n vlastitih frekvencija. Vlastite frekvencije vibracija bez prigušenja određuju se pomoću sustava homogenih linearnih jednadžbi:

$$([k]-\omega^2[m])[X]=[0]. \tag{64}$$

Izjednačavanjem determinante sustava (64) s nulom dobit će se frekvencijska jednadžba koja je n-tog reda u ω^2:

$$\left|[k]-\omega^2[m]\right|=0, \tag{65}$$

odnosno

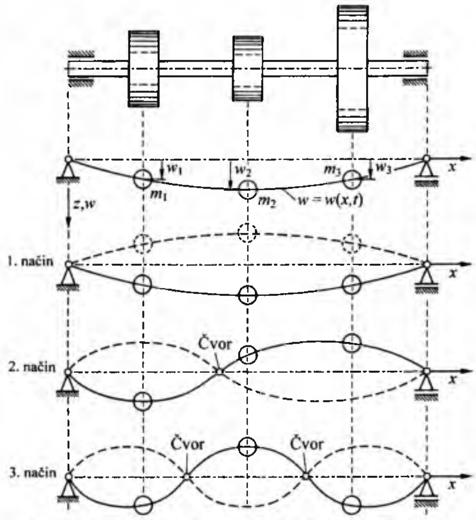
$$|k_{ij} - \omega^2 m_{ij}| = 0. \qquad (66)$$

Načini vibriranja su ortogonalni uz uvjet da je

$$\sum_{i=1}^{n} m_i X_{ir} X_{is} = 0, \qquad (67)$$

gdje su X_{ir} amplitude mase m_i pri frekvenciji ω_r, a X_{is} amplitude mase m_i pri frekvenciji ω_s.

Realni vibracijski sustavi ne modeliraju se uvijek pomoću uzdužnih sustava. Tako, npr., vibracije osovina na kojima se nalaze zupčanici, remenice i drugi diskovi mogu biti torzijske ili fleksijske. Na slici 19 prikazan je model na kojem se provodi analiza fleksijskih vibracija. Mase m_1, m_2 i m_3 sadrže ne samo mase odgovarajućih elemenata na osovini, nego im je pridružena odgovarajuća reducirana masa osovine lijevo i desno od elemenata, tako da u modelu osovina nema mase.



Sl. 19. Fleksijske vibracije sustava s tri stupnja slobode

Koristeći se utjecajnim koeficijentima α_{ij} (v. *Nauka o čvrstoći*, TE 9, str. 277) moguće je pomake masa izraziti pomoću inercijskih sila F_1^i, F_2^i, F_3^i koje djeluju na mase m_1, m_2 i m_3:

$$\begin{aligned} w_1 &= \alpha_{11} F_1^i + \alpha_{12} F_2^i + \alpha_{13} F_3^i, \\ w_2 &= \alpha_{21} F_1^i + \alpha_{22} F_2^i + \alpha_{23} F_3^i, \\ w_3 &= \alpha_{31} F_1^i + \alpha_{32} F_2^i + \alpha_{33} F_3^i. \end{aligned} \qquad (68)$$

Kako je $F_1^i = -m_1 \ddot{w}_1$, $F_2^i = -m_2 \ddot{w}_2$ i $F_3^i = -m_3 \ddot{w}_3$, bit će npr.

$$w_1 = -\alpha_{11} m_1 \ddot{w}_1 - \alpha_{12} m_2 \ddot{w}_2 - \alpha_{13} m_3 \ddot{w}_3. \qquad (69)$$

Slične se jednadžbe mogu napisati za pomake w_2 i w_3. Za fleksijske slobodne vibracije sustava sa slike 19 tri su jednadžbe gibanja koje u matričnom obliku glase

$$[w] + [\alpha][m][\ddot{w}] = 0, \qquad (70)$$

gdje je $[w]$ matrica pomaka, $[\alpha]$ matrica utjecajnih koeficijenata i $[m]$ matrica tromosti. Rješenje u matričnom obliku glasi

$$[w] = [W] \cos \omega t, \qquad (71)$$

a ono daje homogenu jednadžbu:

$$([I] - \omega^2 [\alpha][m])[W] = 0, \qquad (72)$$

gdje je $[I]$ jedinična matrica, a $[W]$ matrica amplituda pomaka. Sustav ima netrivijalno rješenje, ako je determinanta sustava jednaka nuli, odnosno

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} m_1 \omega^2 - 1 & \alpha_{12} m_2 \omega^2 & \alpha_{13} m_3 \omega^2 \\ \alpha_{21} m_1 \omega^2 & \alpha_{22} m_2 \omega^2 - 1 & \alpha_{23} m_3 \omega^2 \\ \alpha_{31} m_1 \omega^2 & \alpha_{32} m_2 \omega^2 & \alpha_{33} m_3 \omega^2 - 1 \end{vmatrix} = 0. \qquad (73)$$

Rješavanjem te determinante dobiju se tri vlastite frekvencije i tri načina vibriranja (sl. 19).

Vibracije kontinuiranih sustava

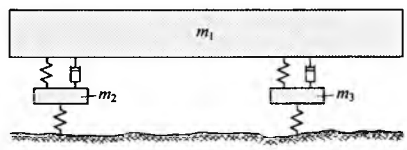
U realnim mehaničkim sustavima svojstva tromosti, prigušenja i elastičnosti često su raspodijeljena po cijeloj konstrukciji (kontinuirani sustavi). Ti se sustavi ne mogu zamijeniti diskretnim sustavima. Jednadžbe gibanja takvih sustava su parcijalne diferencijalne jednadžbe, a već prema rubnim uvjetima rješenja se točno mogu pronaći izravnim rješavanjem, a samo približno varijacijskim i numeričkim postupcima (Rayleighova metoda, konačne razlike, konačni elementi itd.). Osnovni dijelovi takvih konstrukcija obično su niti, membrane, štapovi, ploče i ljuske, tj. elementi koji su definirani u primijenjenoj teoriji elastičnosti.

I. Alfirević

VIBRACIJE STROJARSKIH KONSTRUKCIJA

Modeliranje strojarskih vibracijskih sustava. Izboru modela treba pokloniti posebnu pozornost jer je taj korak presudan za uspješnu analizu vibracija. Teško je ocijeniti do koje se mjere neki mehanički model može pojednostavniti, a da još uvijek dobro opisuje osnovna vibracijska svojstva realnog sustava. Realan vibracijski sustav se može aproksimirati s više mehaničkih modela koji se bitno razlikuju po broju stupnjeva slobode. Tako je, npr., cestovno vozilo vrlo složena konstrukcija koja se sastoji od mnogo pojedinačnih dijelova i koja ima mnogo mogućih vrsta vibriranja. Ako se analiziraju vertikalne vibracije, koje u prvom redu nastaju zbog neravnina na cesti, često se primjenjuje jednostavan mehanički model (sl. 20). Za razmatranje vertikalne translacije i zakretanja oko poprečne osi karoserije dovoljan je mehanički model koji se sastoji od malog broja krutih tijela, te elastičnih i prigušnih elemenata zanemarive mase. Svi ovješeni dijelovi mogu se predstaviti jednim krutim tijelom (masa m_1), a osovine s kotačima (mase m_2 i m_3) drugim krutim tijelima. Elastična svojstva pneumatika modelirana su elastičnim elementom zanemarive mase, a prigušna (disipacijska) svojstva zanemarena su s obzirom na prigušivač udara (amortizer). Dovoljan je, dakle, ravninski model s četiri stupnja slobode. Želi li se razmatrati i zakretanje oko uzdužne osi vozila, tada model mora biti prostoran, s najmanje sedam stupnjeva slobode.

Sl. 20. Jednostavan mehanički model za proračun vertikalnih vibracija karoserije mase m_1 i parova kotača masa m_2 i m_3



Za proračun torzijskih vibracija pogona, koji se sastoji od koljenčaste osovine, spojke, reduktora, kardanskih osovina, pogonske osovine i kotača, potreban je znatno drukčiji mehanički model s više stupnjeva slobode (npr. od 6⋯24).

U rotacijskim pogonskim sustavima dva bitna parametra za samostalno vibracijsko gibanje, inercija i elastičnost, dosta su složeno razdijeljena. Zbog toga takvi sustavi imaju složenu vibracijsku strukturu, ali se za praktičnu analizu vibracija obično mogu s dovoljnom točnošću modelirati kao lanac serijski i paralelno povezanih inercijskih (neelastičnih) i neinercijskih (elastičnih) elemenata. Za praksu su od velike važnosti najčešće samo dvije osnovne samostalne vrste vibriranja: torzijske vibracije oko uzdužne osi osovinskog sustava i fleksijske vibracije u vertikalnoj, odnosno horizontalnoj (uzdužnoj) ravnini. U nekim pogonskim sustavima mogu postojati i osne (aksijalne) vibracije, no većinom ne postoje samostalno, već kao popratna pojava uz torzijske vibracije rotirajućeg dijela. Slično će i u rotorskom dijelu pogonskog sustava fleksijske vibracije u vertikalnoj ravnini uzrokovati popratne vibracije u horizontalnoj ravnini i obratno. Iznimno, u uvjetima elastične simetrije sustava, rezultirat će vitlajuće gibanje rotora s mogućnošću nestabilnog stanja gibanja, sličnog rezonanciji.

Za analizu torzijskih vibracija pogonskih sustava potrebni su podatci o torzijskim parametrima modela: momentima inercije (zamašnim masama) inercijskih elemenata i konstantama torzijske krutosti elastičnih elemenata (spojnih osovina). Model za analizu fleksijskih vibracija sastojat će se od diskretno raspoređenih masa i fleksijskih elastičnih elemenata kojima su te mase međusobno povezane. Za razliku od torzijskog modela, od bitne će važnosti biti raspored i lateralna elastična popustljivost oslonaca koji ograničavaju lateralno gibanje. Ako se elastičnost oslonaca (ležaja) ne može zanemariti, onda su nastale vibracije spregnute fleksijsko-lateralne.

Vibracije rotacijskih pogonskih sustava mogu se trajno podržavati periodičnim silama ili momentima vanjskog ili unutrašnjeg podrijetla (kinetička uzbuda), no isto tako i periodičnim prisilnim pomicanjem bilo koje točke konfiguracije (kinematička uzbuda). Kao i svaki drugi inercijsko-elastični sustav, tako i rotacijski pogonski sustav može dospjeti u rezonancijsko stanje, i to svaki put kada se frekvencija periodične uzbudne sile ili pomaka (preciznije: frekvencija jednog od harmonijskih članova periodične sile ili pomaka) izjednači s jednom od vlastitih frekvencija sustava. U fleksijsko-simetričnom (izotropnom) rotorskom sustavu rezonancije prelaze u kritična nestabilna stanja s redovito nedopustivo velikim polumjerima vitlanja. Posebna su vrsta uzbude impulsni ili općenito neperiodični poremećaji (kinetički ili kinematički).

Utjecaj zupčanika u zahvatu na vibriranje sustava. Dodatna opterećenja zubi u zahvatu izvor su specifičnih vibracija koje se prenose i na osovine i ležaje, što dodatno dinamički opterećuje njihove elemente, a to je osobito izraženo u rezonancijskom stanju.

Izvori uzbude mogu biti različiti. Tako uzbude nastaju kao posljedica periodičnih varijacija u lateralnoj krutosti zubi, što je opet posljedica varijacije u broju zubnih parova koji se u određenom trenutku nalaze u zahvatu. Te su varijacije periodičnog karaktera, a njihova amplituda ovisi u prvom redu o stupnju prekrivanja, a zatim i o vanjskom opterećenju, tj. o veličini statičke sile na dodirnim plohama zubi u zahvatu.

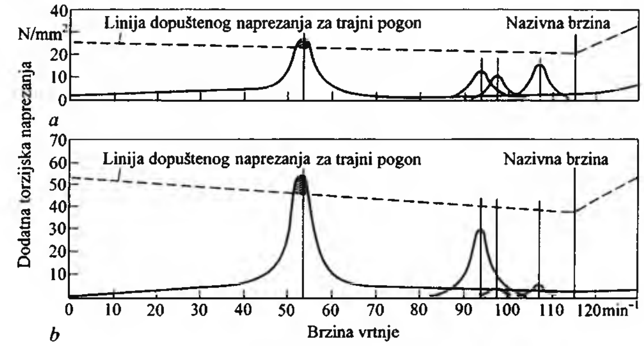
Uzbude mogu nastati i kao posljedica istrošenosti ili pogrešaka u izradbi zubi (pogreške u obliku i smjeru boka zuba). Tehnološke pogreške najčešće imaju periodični karakter, pa uzrokuju periodične varijacije u prijenosnom omjeru i u lateralnoj krutosti zubi.

Kao posljedica fluktuacija pogonskog momenta i momenta tereta također nastaju uzbude koje su izvor dodatnih dinamičkih opterećenja na zubima. Prolazne fluktuacije pojavljuju se u nestacionarnom dinamičkom režimu elektromotornog pogona, npr. prilikom zaleta ili zaustavljanja (kočenja). Trajne fluktuacije prisutne su u pogonima u kojima radni ili pogonski stroj nema konstantan moment pri stacionarnom režimu, već u tom momentu postoje regularne cikličke komponente (dizelski električni pogonski sustav, pogon s klipnim kompresorom i sl.) koje proizlaze iz načela rada stroja.

Elektromotorni pogon. Pri zaletu i pri zaustavljanju sustav s elektromotornim pogonom često prolazi kroz rezonancijsko područje, što je povezano s vibracijskim opterećenjem te stoga rezultira smanjenjem raspoložive energije za ubrzavanje.

Prolaz kroz rezonancijsko područje može se objasniti i analizirati samo na relativno jednostavnom modelu s jednim stupnjem vibracijske slobode, koji se prilikom ubrzavanja od stanja mirovanja do nominalne brzine vrtnje nalazi pod djelovanjem konstantnog pogonskog momenta i konstantnog tereta. U rotorskom sustavu s velikim pogonskim momentima i malim ekscentričnostima može se potpuno zanemariti povratni utjecaj savijanja, odnosno lateralnog pomaka, na rotacijsko gibanje. Brzina vrtnje tada je linearna funkcija vremena, pa se lateralne ili fleksijske vibracije koje pritom nastaju mogu egzaktno analitički opisati. Međutim, ako je ekscentričnost dosta velika, odnosno ako je pogonski moment relativno malen, u području rezonancije brzina se vrtnje smanjuje, jer se dio pogonske energije troši na lateralne ili fleksijske vibracije. Istodobno se povećavaju i uvijek prisutni gubitci zbog prigušenja i trenja. Pod takvim okolnostima može se dogoditi da rotorski sustav nema dovoljno energije da izađe iz rezonancijskog područja, veći se dio korisne energije motora troši na održavanje vibracijskog stanja, a manji dio na svladavanje korisnog tereta pri rezonancijskoj (kritičnoj) brzini vrtnje.

Vibracije brodskih pogonskih sustava. Od analize torzijskih vibracija brodskog pogonskog sustava zahtijeva se proračun kritičnih brzina i određivanje dodatnih torzijskih naprezanja u čitavu području rada Dieselova motora (sl. 21). Naprezanja koja prelaze granicu propisanu od klasifikacijskog društva zabranjena su i dotično se područje mora u pogonu izbjegavati. Upravo naprezanja u rezonancijama (ekstremi na sl. 21) odlučuju hoće li pogon biti dopušten u čitavu području.



Sl. 21. Dodatna torzijska naprezanja u radilici (*a*) i u međuosovini (*b*) 7-cilindričnog dvotaktnog Dieselovog brodskog motora s četverokrilnim brodskim vijkom

Uobičajena metoda za određivanje rezonancijskih naprezanja jest energijska metoda. Ona se temelji na činjenici da sustav u rezonanciji troši u stacionarnom stanju svu energiju poremećaja na svladavanje vanjskih i unutrašnjih prigušenja. Iz tako postavljene energijske ravnoteže dobiva se amplituda na prvom koljenu radilice, a odatle se, uz poznati način vibriranja (slobodnog) sustava i uz pretpostavku relativno slabog sveukupnog prigušenja, određuju dodatna rezonancijska naprezanja na bilo kojem dijelu radilice ili osovinskog voda. Kako su amplitude vibracija, a s tim ujedno i naprezanja u sustavu, proporcionalne s ukupnom energijom poremećaja sustava, pruža se mogućnost da se izravnim uspoređivanjem energija poremećaja zaključuje i o veličini amplituda i naprezanja, naravno uz pretpostavku da je prigušenje sustava ostalo nepromijenjeno.

Motor je u brodskom pogonskom sustavu glavni izvor poremećaja zbog izrazito promjenljiva momenta vrtnje na koljenima radilice. Zbog toga se za proračun amplituda jedino takav poremećaj uzima u obzir, dok se svi ostali mogući poremećaji većinom zanemaruju. Međutim, katkad može i poremećaj koji potječe od brodskog vijka imati znatan utjecaj na veličinu rezonancijskih naprezanja. Takav poremećaj nastaje stoga što strujanje vode nije na čitavoj površini zahvata brodskog vijka homogeno. Uzrok leži u nejednoličnu sustrujanju u području djelovanja brodskog vijka, što je osobito izraženo u jednovijčanih brodova, kojima vijak radi u neposrednoj blizini trupa.

Vibracije rotora. Osnovni uzroci vibracija rotora jesu neuravnoteženost, rad u području rezonancije, nestabilnost kliznih ležaja, nekoaksijalnost spojenih rotora, mala krutost sustava za oslanjanje, elastična asimetrija pri fleksiji rotora, kontakt rotora i statora, aerodinamičke ili hidraulične nestabilnosti, tekućina zatvorena u šupljini rotora i dr. Analiza vibracija brzih rotora obično obuhvaća tri faze: *a*) određivanje kritičnih brzina i njima pridruženih modalnih elastičnih linija (načina vibriranja) unutar radnog područja i malo iznad maksimalne radne brzine, *b*) određivanje odziva neuravnoteženog rotora unutar radnog područja uz primjenu raznih kombinacija specificirane raspodjele neuravnoteženosti, *c*) određivanje brzina pri kojima počinju subsinkrone nestabilnosti, što je povezano s hidrodinamičkim ležajima.

Sve tri faze analize vibracija temelje se na linearnom mehaničkom modelu, iako je u osnovi sustav nelinearan. Usprkos pojednostavljenjima, analize većinom daju precizne odgovore (amplitude vibracija dovoljno su malene da se nelinearni efekti ne očituju).

Pri analizi vibracija rotora treba imati u vidu da između statora i rotora djeluju magnetne sile i da tangencijalne komponente tih sila stvaraju zakretni moment, a normalne komponente lateralno opterećuju i rotor i stator. U simetriji se sile međusobno poništavaju. Međutim, za nepotpuno kružni rotor i za rotor koji nije centričan s obzirom na stator radijalne sile neće biti simetrične, pa će stator radijalno privlačiti rotor.

Kako magnetno polje u zračnom rasporu djeluje na rotor divergentno, to će ono utjecati na inercijsko-elastične karakteristike rotorskog sustava i smanjivati lateralne krutosti i vlastite frekvencije fleksijskih vibracija. Fleksijska krutost rotorske osovine mora se, dakle, pri proračunu kritičnih brzina vrtnje električnih strojeva umanjiti za utjecaj magnetnog privlačenja statora, odakle i slijedi smanjenje vlastite frekvencije, odnosno kritične brzine vrtnje magnetno uzbuđenog prema magnetno neuzbuđenom rotoru.

Ako je rotor električnog stroja ekscentrično postavljen na osovinu, rezultantna privlačna sila statora rotira zajedno s rotorom i usmjerena je stalno u smjeru mjesta najmanje zračnosti između statora i rotora. Jednaka situacija nastaje i prilikom ekscentričnosti težišta rotora. Rotirajuća magnetna sila djeluje u istom smislu kao i centrifugalna sila neuravnoteženog rotora i predstavlja periodičnu uzbudnu silu za lateralne vibracije rotora bilo u vertikalnoj ili u horizontalnoj ravnini. Odatle slijedi da rotirajuća magnetna sila može uzrokovati rezonanciju kad god se brzina vrtnje izjednači s kružnom vlastitom frekvencijom lateralnih vibracija rotorskog sustava.

Alatni strojevi. Na proces rezanja utječu samouzbudne i prisilne vibracije. Prilikom *samouzbudnih vibracija* sustav stroj–obradak vibrira s jednom ili više vlastitih frekvencija. Pritom se vibracije energijski podržavaju iz izvorâ koji nisu vibracijskog karaktera, što znači da za podržavanje samouzbudnih vibracija nisu odgovorne nikakve vanjske (nezavisne) vibracijske sile niti vibracijski pomaci. Nasuprot tome, *prisilne vibracije* nastaju kao posljedica izmjeničnih sila ili pomaka bilo koje frekvencije. Od posebne je važnosti rezonancija koja nastaje kad se frekvencija uzbudne sile ili pomaka poklapa s jednom od vlastitih frekvencija sustava.

Poseban tip vibracija koje se prepoznaju kao tzv. drhtanje uzrokovano silama rezanja granični je tip između samouzbudnih i prisilnih vibracija. Prisilna komponenta utječe na periodičnost u odlomu materijala, a njezina je posljedica valovitost površine obratka, što pospješuje pojavu samouzbudne komponente vibracija, a ona se podržava time što se otpor rezanja periodično mijenja. Frekvencija drhtanja jedna je od vlastitih frekvencija sustava.

Zbog malih amplituda taj je tip vibracija beznačajna smetnja pri grubljoj obradbi odvajanjem čestica. Međutim, prilikom brušenja ili poliranja čak i relativno malena gibanja u smjeru okomitom na površinu koja se obrađuje, kakva se pojavljuju pri drhtanju reznog alata ili obratka, ostavljaju tragove koji se dadu zamijetiti zbog svjetlosnih refleksa. Tu je pojavu često nemoguće ukloniti.

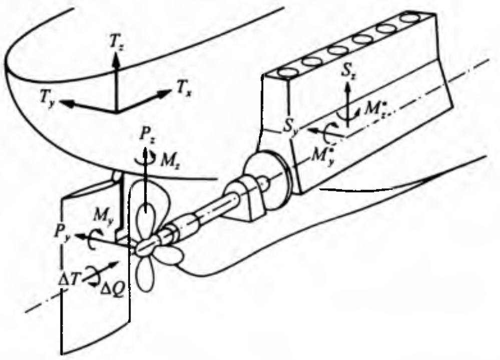
M. Stegić

VIBRACIJE BRODA

Vibracije brodske konstrukcije pobuđuju glavni i pomoćni strojevi i propeler kao unutarnji uzročnici, te valovi kao vanjski uzročnici (v. *Brod*, TE 2, str. 256). Uzbudne su sile od unutarnjih uzročnika periodične, pa se za proračun vibracija primjenjuje harmonijska analiza, dok valovi uzrokuju prolazne vibracije. Uzbuda stapnih strojeva nastaje kao vanjska uzbuda zbog gibanja masâ, te kao unutarnja uzbuda zbog neravnomjernog izgaranja plinova u cilindrima.

Zbog rada brodskog vijka u nejednoličnom polju sustrujanja nastaju promjenljive sile na krilu vijka i na oplati trupa iznad vijka (sl. 22). Frekvencija prvog harmonika tih sila jednaka je umnošku kutne brzine brodskog vijka i broja njegovih krila, a intenzitet sila znatno ovisi o stupnju kavitacije brodskog vijka. Te sile pobuđuju osovinski vod na vibriranje, pri čemu se prilikom rezonancije one mogu pri prijelazu na brodsku konstrukciju preko ležajeva osovine znatno uvećati.

Uzbudne sile koje se stvaraju udaranjem pramca o valove ovise o obliku broda, stanju mora, te relativnoj brzini i pravcu kretanja broda u odnosu na valove. Nepodnošljiva stanja u plovidbi izbjegavaju se promjenom brzine i kursa broda. Vibracije trupa većih brodova mogu nastati i pri plovidbi na relativno kratkim valovima, ako se prirodna (vlastita) frekvencija trupa (obično prvog reda) poklopi s relativnom frekvencijom valova. Ta se pojava naziva *pruženje*.



Sl. 22. Uzbudne sile stroja i brodskog vijka na osovini i oplati trupa: S_y, S_z uzbudne sile stroja u smjeru osi y i z, M_y^*, M_z^* uzbudni momenti stroja oko osi y i z, P_y, P_z uzbudne sile vijka na osovinu u smjeru osi y i z, M_y, M_z uzbudni momenti vijka na osovinu oko osi y i z, ΔQ torzijski uzbudni moment vijka na osovini, ΔT uzdužna uzbudna sila vijka na osovinu, T_x, T_y, T_z uzbudne sile vijka na oplati trupa u smjeru osi x, y i z

Energija svih induciranih sila širi se dalje od svog izvora po čitavoj brodskoj konstrukciji. Već prema položaju, intenzitetu i frekvenciji uzbude, te raspodjeli krutosti i masâ broda, odziv konstrukcije može imati globalni ili lokalni karakter. Tako se razlikuju globalne vibracije brodskog trupa, lokalne vibracije panela, okvirnih rebara i sl., te vibracije podstruktura kao što su npr. nadgrađe, dvodno, glavni stroj i dr.

Vibracije trupa. Vibracije brodskog trupa dijele se na uzdužne, poprečne (vertikalne i horizontalne) i torzijske, već prema tome oscilira li poprečni presjek trupa u uzdužnom ili poprečnom smjeru, odnosno zakreće li se oko uzdužne osi. Zbog ekscentričnog položaja težišta masâ na poprečnom presjeku, s obzirom na neutralnu liniju, uzdužne su vibracije spregnute s vertikalnima, a horizontalne s torzijskim vibracijama. U analizi vibracija ta se sprega obično zanemaruje, osim za brodove sa širokim palubnim otvorima, u kojih je sprega horizontalnih i torzijskih vibracija vrlo izražena zbog položaja središta smicanja ispod kobilice. Uzdužne vibracije brodskog trupa od sekundarne su važnosti zbog velike otpornosti trupa na rastezanje.

Osnovna uzbuda vibracija brodskog trupa jesu inercijske sile glavnih strojeva jer je njihova frekvencija u području prvih prirodnih frekvencija trupa. U analizi vibracija brodski se trup predstavlja gredom promjenljiva presjeka. Odziv trupa dobiva se rješenjem odgovarajuće diferencijalne jednadžbe, koja pokazuje dinamičku ravnotežu sila na diferencijalnom elementu grednog modela trupa. Tako npr. diferencijalna jednadžba harmonijskih fleksijskih vibracija trupa s uključenim utjecajem smicanja i zakretanja masa glasi

$$\frac{d^2}{dx^2}\left(EI\frac{d^2 w_b}{dx^2}\right)+\omega^2\left(\frac{EI}{GF}m+I_s\right)\frac{d^2 w_b}{dx^2}+ +\omega^2\left(\omega^2\frac{I_s}{GF}-1\right)m w_b = q, \tag{74}$$

gdje je w_b progib savijanja, ω frekvencija uzbude, E modul elastičnosti, G modul smičnosti, I moment tromosti poprečnog presjeka, F smična površina, m masa broda i okolne vode po jedinici duljine, I_s moment tromosti mase broda po jedinici duljine, q opterećenje, a x apscisa.

Za torzijske vibracije brodskog trupa s normalnim palubnim otvorima diferencijalna jednadžba ima oblik

$$\frac{d}{dx}\left(GI_x\frac{d\psi}{dx}\right)+\omega^2 I_m \psi = -\mu_t, \tag{75}$$

gdje je ψ kut uvijanja, I_x parametar krutosti na uvijanje, I_m polarni moment tromosti mase broda i okolne vode, a μ_t distribuirani uzbudni moment uvijanja.

U vibracijama brodskog trupa, osim vlastite mase broda i tereta, sudjeluje i okolna voda. Njezin se utjecaj uzima u obzir tako što se masi broda i tereta pridružuje tzv. dodatna masa okolne vode. Dodatna se masa određuje iz jednakosti radova pripadne sile inercije i tlaka na oplakanoj površini. Raspored tlaka $p = -\rho\partial\varphi/\partial t$ dobiva se rješenjem Laplaceove diferencijalne jednadžbe za potencijalno strujanje, $\Delta\varphi=0$, koja pokazuje kontinuitet strujanja idealne tekućine, uz odgovarajuće rubne uvjete: $p=0$ na površini vode i neizmjernoj udaljenosti od oplakane površine broda, te $\partial p/\partial n = -\rho a_n$ na oplakanoj površini, gdje je φ potencijal brzine strujanja, t vrijeme, n normala na oplakanu površinu, ρ gustoća vode, a a_n pretpostavljeno normalno ubrzanje te površine. Taj se matematički problem danas uspješno rješava metodom konačnih elemenata.

Vibracije panela (ukrepljenih ploča). Lokalne vibracije broda očituju se u prvom redu na panelima paluba, pregrada i oplati broda. Te se vibracije pobuđuju globalnim vibracijama brodske konstrukcije na rubovima panela, a katkad i izravnom uzbudom. Dinamičko stanje ravnoteže diferencijalnog elementa panela opisano je diferencijalnom jednadžbom:

$$D_x\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}+2B\frac{\partial^4 w}{\partial x^2\partial y^2}+D_y\frac{\partial^4 w}{\partial y^4}+\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}=p, \tag{76}$$

gdje su x i y koordinate, w progib panela, D_x, D_y fleksijske krutosti, B torzijska krutost, t vrijeme, a p specifično opterećenje. Ako je panel u dodiru s tekućinom, osim vlastite mase panela i tereta na njemu treba uzeti u obzir i dodatnu masu okolne vode.

Za većinu se brodskih panela može pretpostaviti da su slobodno oslonjeni na rubovima, pa se elastična ploha može predvidjeti u obliku dvostrukoga Fourierova reda. Tako se jednostavnim rješavanjem diferencijalne jednadžbe dobiva izraz za prirodne frekvencije panela:

$$\omega_{kl}^2=\frac{\pi^4}{\mu}\left[k^4\frac{D_x}{a^4}+2k^2l^2\frac{B}{a^2b^2}+l^2\frac{D_y}{b^4}\right], \tag{77}$$

gdje su a i b duljina, odnosno širina panela, μ specifična masa, a k, l harmonici vibracija. Razvijanjem opterećenja u dvostruki Fourierov red za amplitudu pojedinih harmonika prisilnih vibracija dobiva se

$$w_{kl}=\frac{p_{kl}}{(\omega_{kl}^2-\omega^2)\mu}. \tag{78}$$

U slučaju drukčijeg načina oslanjanja rubova problem vibracija panela može se riješiti metodom konačnih razlika, metodom minimuma totalnog potencijala ili metodom konačnih elemenata, osobito za nepravilne konture.

Vibracije podstruktura. Da bi se mogle analizirati vibracije podstruktura kao što su nadgrađe, dvodno, glavni stroj, osovinski vod i dr., pogodno je, zbog njihove sprege, modelirati čitavu brodsku konstrukciju. U tu se svrhu primjenjuje metoda konačnih elemenata, u okviru koje se složena brodska konstrukcija modelira pomoću više jednostavnih plošnih i grednih elemenata koji se međusobno spajaju u određenom broju čvorova. Za svaki tipični element izvodi se pripadna jednadžba koja pokazuje ovisnost čvornih sila o pomacima čvorova i opterećenju elementa. Ispunjavanjem uvjeta ravnoteže sila i kompatibilnosti pomaka u čvorovima dobiva se jednadžba sustava u obliku

$$[K]\{\delta\}+[C]\{\dot\delta\}+[M]\{\ddot\delta\}=\{F(t)\}, \tag{79}$$

gdje je $[K]$ matrica krutosti, $[C]$ matrica prigušenja, $[M]$ matrica masa, $\{\delta\}$ vektor pomaka čvorova, a $\{F(t)\}$ vektor opterećenja. Sve su matrice simetrične, što je velika prednost pri rješavanju problema pomoću računala.

Prisilne vibracije mogu se odrediti izravnim rješavanjem matrične diferencijalne jednadžbe (79) ili posredno, metodom superpozicije glavnih (prirodnih) načina vibriranja. Prema toj se metodi vektor pomaka predstavlja u obliku $\{\delta\}=[\phi]\{x\}$, gdje matrica $[\phi]$ obuhvaća prirodne načine vibriranja, dok $\{x\}$ predstavlja modalne pomake. Tako se jednadžba (79) prevodi u sustav modalnih jednadžbi:

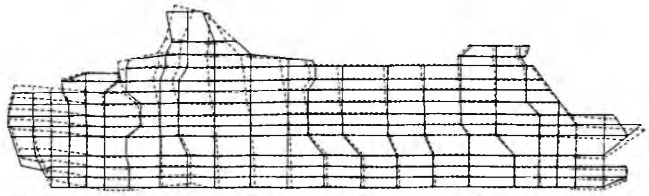
$$[k]\{x\}+[c]\{\dot x\}+[m]\{\ddot x\}=\{f(t)\}, \tag{80}$$

gdje su $[k]$, $[c]$ i $[m]$ matrice modalne krutosti, prigušenja i masa, a $\{f(t)\}$ vektor modalnog opterećenja. Jednadžbe sustava (80) spregnute su jedino preko matrice prigušenja $[c]$, koja u načelu nije dijagonalna, dok su matrice $[k]$ i $[m]$ dijagonalne. Radi pojednostavljenja postupka rješavanja sustava jednadžbe se rastavljaju (raspregnu) na skup nespregnutih jednadžbi, pretpostavljajući prigušenje u ortogonalnom obliku, $[C]=\alpha[K]+\beta[M]$. Obično se koeficijenti modalnog prigušenja $[c]$ uzimaju u udjelu kritične vrijednosti prigušenja na osnovi iskustvenih podataka.

Za harmonijsku uzbudu konačno se rješenje vibracija dobiva pomoću skupa algebarskih jednadžbi kojemu je rješenje jednostavno odrediti. Za prolazne vibracije rješenje se pronalazi integracijom po vremenu tzv. metodom korak po korak. Najpoznatije su metode za tu svrhu Houboltova, Newmarkova i Wilsonova te metoda harmonijskog ubrzanja.

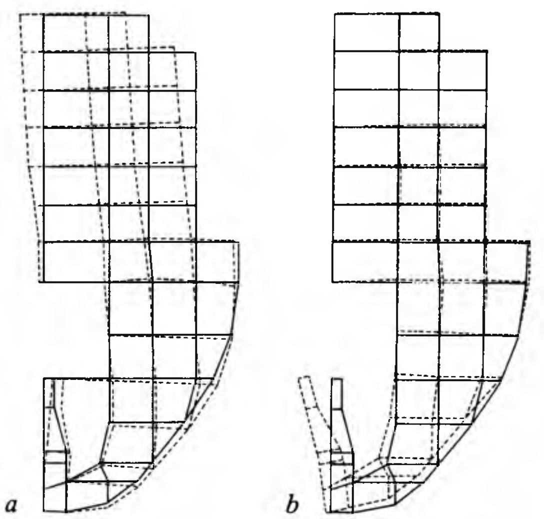
Kako je brodska konstrukcija vrlo složena, to ni upotreba treće generacije tzv. superračunala s paralelnim procesiranjem nije dovoljno djelotvorna za bitnije smanjenje vremena numeričke obradbe problema. Stoga se za redukciju problema primjenjuju metoda superelemenata i modalna sinteza podstruktura.

Za ilustraciju proračuna vibracija prikazane su prisilne vibracije putničkog trajekta *Amorella* izgrađenog 1988. u brodogradilištu »Split« u Splitu (sl. 23). Primijenjen je ravninski model i metoda superpozicije prirodnih oblika vibriranja.



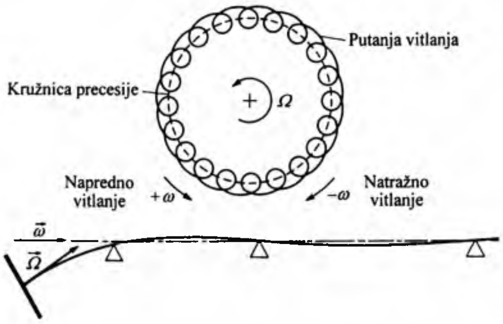
Sl. 23. Prisilne vibracije putničkog trajekta *Amorella* pobuđene radom brodskog vijka

Slika 24 prikazuje prvi prirodni način vibriranja glavnog stroja i okolne strukture strojarnice tankera za naftne prerađevine od 32000 t do 36000 t nosivosti izgrađenog 1990. u brodogradilištu »Uljanik« u Puli. Primijenjen je prostorni model i metoda superelemenata.



Sl. 24. Prvi prirodni način vibracija glavnog stroja. *a* s uporama (ω_1 = 11,058 Hz), *b* bez upora (ω_1 = 8,473 Hz)

Vibracije osovinskog voda. Poseban su problem vibracije osovinskog voda, koje mogu biti uzdužne, fleksijske i torzijske. Fleksijske vibracije rotirajućeg osovinskog voda prerastaju zbog giroskopskog efekta u vitlajuće vibracije, koje mogu biti napredne ili natražne (sl. 25). Tako se prirodna frekvencija fleksijskih vibracija razlučuje na dvije vrijednosti. Proračun vitlajućih vibracija provodi se jednako kao i proračun fleksijskih vibracija, s tim da se dijametralni moment tromosti brodskog vijka I, uključujući



Sl. 25. Vitlajuće vibracije osovinskog voda

i dodatnu masu okolne vode, korigira za svaki red vibracije k prema izrazu

$$I_k = I\left(1-\frac{2}{k}\right), \tag{81}$$

u kojem $k>0$ pripada naprednom, a $k<0$ natražnom vitlanju. Kad se proračunaju prirodne frekvencije sustava ω_n, pripadne brzine vrtnje osovine Ω dobivaju se iz relacije $k=\pm\,\omega_n/\Omega$. Zbog dvostruko veće gustoće spektra prirodnih frekvencija vitlajućih vibracija s obzirom na fleksijske vibracije povećava se mogućnost pojave rezonantnih vibracija osovinskog voda. To svakako treba uzeti u obzir pri projektiranju broda, jer posljedica rezonantne vibracije osovinskog voda u ekstremnim slučajevima može biti gubitak brodskog vijka.

I. Senjanović J. Uršić

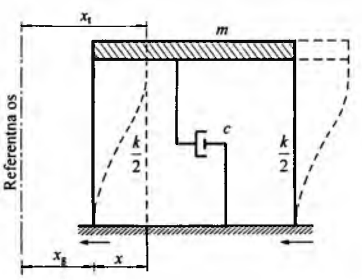
VIBRACIJE GRAĐEVINSKIH KONSTRUKCIJA

Vibracije građevinskih konstrukcija specifične su s obzirom na uzbudu. Među najvažnijim je njihovim uzrocima uzbuda od potresa. Zato je potresno građevinarstvo posebno razvijeno, s nizom strogih propisa. Na drugom su mjestu također uzbude slučajnog karaktera (stohastičke uzbude), koje su posljedica strujanja zraka ili vode. Takvim uzbudama izložene su građevinske konstrukcije u obliku tornjeva, mostova, nebodera ili podvodnih dijelova platformi i sidrenih pontona. Jače vibracije nastaju u građevinarstvu i u temeljima strojeva. Strojevi uzbuđuju temelje harmonijski ili se njihove vibracije prenose s temelja na okoliš, tj. na građevinu u kojoj se nalaze. Sve se te vibracije uzimaju u obzir pri projektiranju građevinskih konstrukcija, koje stoga podliježu posebnim propisima kako bi se nepoželjno djelovanje na konstrukciju što više smanjilo.

Vibracije uzrokovane potresom. Građevinska konstrukcija opterećena silama nastalim od vibracija tla u potresu diskretan je sustav s jednim stupnjem slobode (sl. 26). U dinamici konstrukcija za takav sustav vrijedi diferencijalna jednadžba:

$$m\ddot{x}(t)+c\dot{x}(t)+k\,x(t) = -m\ddot{x}_g(t), \tag{82}$$

gdje je $x(t)$ relativni pomak mase m s obzirom na tlo, $\ddot{x}_g(t)$ ubrzanje podloge, c faktor prigušenja, k konstanta krutosti, a t vrijeme.



Sl. 26. Idealizirana građevinska konstrukcija s jednim stupnjem slobode; x_t totalni pomak

Rješenje te diferencijalne jednadžbe dano je Duhamelovim integralom, a nastaje superpozicijom niza impulsa kojima je pretpostavljena potpuno proizvoljna funkcija opterećenja potresom. Duhamelov integral ima oblik

$$x(t) = \frac{1}{v}\int_0^t \ddot{x}_g(\tau)\mathrm{e}^{-\zeta\omega_n(t-\tau)}\sin v(t-\tau)\mathrm{d}\tau, \tag{83}$$

gdje je ζ kvocijent prigušenja i kritičnog prigušenja, a v kružna frekvencija vlastitih prigušenih vibracija konstrukcije. Za praktično rješenje tog problema upotrebljava se metoda spektara odziva, koja se naziva spektralnom analizom, a osniva se na izrazu

$$r_{max} = \max|r(t)|. \tag{84}$$

Taj izraz pokazuje ovisnost neke vrijednosti r_{max} o vremenu titraja T vlastitih vibracija konstrukcije s jednim stupnjem slobode, a njezin grafički prikaz naziva se spektar odziva funkcije $r(t)$. Ako se za $r(t)$ uzme pomak $x(t)$, vrijedi da je x_{max} jednak *spektralnom pomaku* S_d. Funkcionalna ovisnost između spektralnog pomaka S_d i periode T zove se *spektar odziva pomaka.* Kako je razlika između kružne frekvencije prigušenih vibracija (v) i kutne frekvencije neprigušenih vibracija (ω_n) neznatna za male vrijednosti ζ, a one u građevinskim konstrukcijama jesu malene, Duhamelov se integral (83) može napisati u obliku

$$x(t) = \frac{1}{\omega_n}X(t), \tag{85}$$

gdje je

$$X(t) = \int_0^t \ddot{x}_g(\tau)\mathrm{e}^{-\zeta\omega_n(t-\tau)}\sin\omega_n(t-\tau)\mathrm{d}\tau. \tag{86}$$

Iz toga izlazi da je

$$S_v = X_{max} = \left[\int_0^t \ddot{x}_g(\tau)\mathrm{e}^{-\zeta\omega_n(t-\tau)}\sin\omega_n(t-\tau)\mathrm{d}\tau\right]_{max} \tag{87}$$

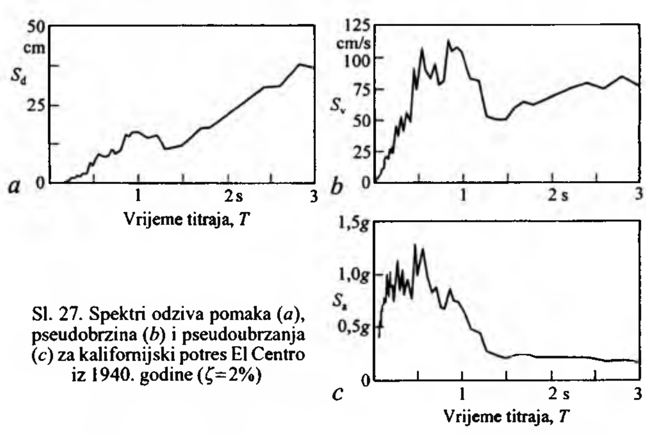
Vrijednost S_v zove se *spektralna pseudobrzina*, a ovisnost između S_v i vremena titraja T *spektar odziva pseudobrzine.* Prefiks *pseudo* pokazuje da se vrijednost integrala u izrazu (87) razlikuje od spektra odziva relativne brzine $\dot{x}_{max}$ u funkciji od T. To znači da se prema naprijed navedenom može napisati

$$S_v = \omega_n\,S_d = \frac{2\pi}{T}S_d, \tag{88}$$

a analogni su tome i izrazi za *spektralno pseudoubrzanje*:

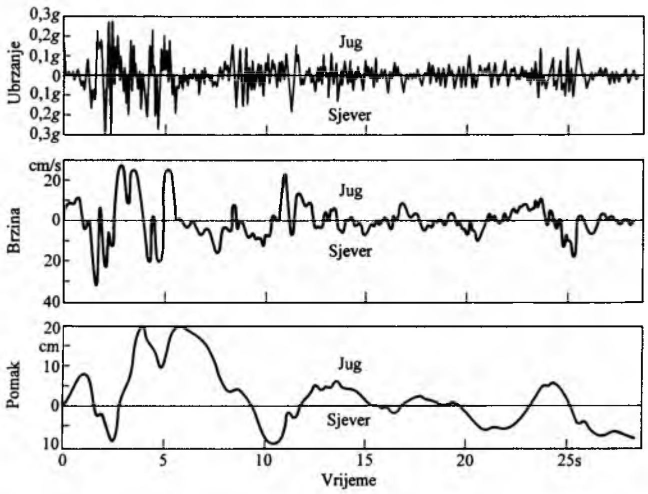
$$S_a = \omega_n\,S_v = \omega_n^2\,S_d = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 S_d \tag{89}$$

i za *spektar odziva pseudoubrzanja* kao ovisnost S_a o T, gdje je također upotrijebljen prefiks *pseudo* da bi se taj spektar razlikovao od spektra odziva apsolutnog ubrzanja.



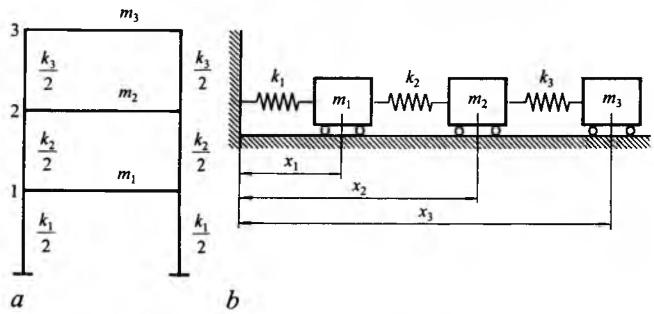
Sl. 27. Spektri odziva pomaka (a), pseudobrzina (b) i pseudoubrzanja (c) za kalifornijski potres El Centro iz 1940. godine ($\zeta=2\%$)

Spektri odziva pomaka, pseudobrzine i pseudoubrzanja prikazani su na slici 27 za kalifornijski potres velikog intenziteta El Centro od 18. svibnja 1940. godine, i to za vrijednost $\zeta=2\%$. Ti su spektri bili među prvima za registrirani potres velikog intenziteta, a mnogo se primjenjuju pri projektiranju građevinskih konstrukcija koje trebaju biti otporne na opterećenja uzrokovana takvim potresima. Ta su tri dijagrama međusobno povezana izrazima (88) i (89), pa se pri određivanju seizmičkih sila koje djeluju na konstrukciju uzima bilo koja od veličina S_d, S_v ili S_a dobivenih



Sl. 28. Registrirane vrijednosti ubrzanja, brzine i pomaka za potres El Centro (u pravcu jug–sjever) od kojih su dobiveni spektri odziva prikazani na slici 27

registracijom ubrzanja stvarno događenih potresa. Jedna takva registracija ubrzanja, te vrijednosti brzina i pomaka dobivene integriranjem registriranih ubrzanja, prikazani su na slici 28 za isti potres El Centro. Slika 27 služi samo kao ilustracija, dok se za proračun neke građevinske konstrukcije na djelovanje sila potresa određene jačine uzimaju digitalizirane vrijednosti tih spektara.



Sl. 29. Idealizirana građevina s tri stupnja slobode (*a*) i model građevine (*b*) pomoću kojeg se postavljaju diferencijalne jednadžbe gibanja

Ako se pretpostavi da su u trokatnoj građevini (sl. 29 a) krutosti greda na savijanje beskonačno velike s obzirom na krutosti stupova ($k_1/2$, $k_2/2$ i $k_3/2$) kada je građevina opterećena horizontalnim silama od potresa, te ako se zanemari utjecaj prigušenja, analiza ponašanja takve građevine u horizontalnom pravcu može se provesti prema modelu na slici 29 b. Time se smanjuje stvarni broj stupnjeva slobode te građevine, koja je nazvana građevinom posmika. Sustav diferencijalnih jednadžbi kojima se računaju vlastite vrijednosti vibriranja građevine za horizontalan pravac jest

$$\begin{aligned} m_1\ddot{x}_1 + k_1 x_1 - k_2(x_2 - x_1) &= 0, \\ m_2\ddot{x}_2 + k_2(x_2 - x_1) - k_3(x_3 - x_2) &= 0, \\ m_3\ddot{x}_3 + k_3(x_3 - x_2) &= 0, \end{aligned} \tag{90}$$

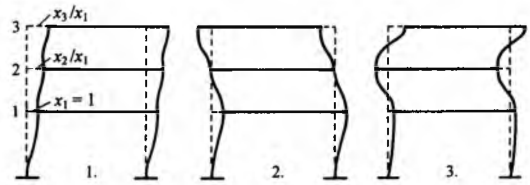
ili u matričnom obliku za konačan broj stupnjeva slobode:

$$[m][\ddot{x}] + [k][x] = [0], \tag{91}$$

pri čemu je matrica masâ dijagonalna ($m_{ij} = 0$ za $i \neq j$), a matrica krutosti puna, te se radi o analizi *statički spregnutoga neprigušenog sustava.* Vlastiti načini vibriranja za određene bočne krutosti stupova i katne mase okvira sa slike 29 dani su za sva tri načina vibriranja na slici 30.

Diskretan sustav s n stupnjeva slobode (sl. 31) može se rastaviti na n nezavisnih diskretnih sustava, od kojih svaki ima po jedan stupanj slobode. Takvo je razlaganje u dinamici konstrukcija poznato pod nazivom *modalna analiza* ili *analiza razvijanja po vlastitim načinima*. Tako se za proračun seizmičkih sila koje djeluju na diskretan sustav s n stupnjeva slobode mogu upotrije-

	ω_n^2, s^{-2}	T, s	x_1	x_2	x_3
1.	69,3	0,755	+ 1,00	+ 1,471	+ 1,639
2.	579	0,261	+ 1,00	− 0,146	− 1,041
3.	1231	0,179	+ 1,00	− 2,220	+ 2,680

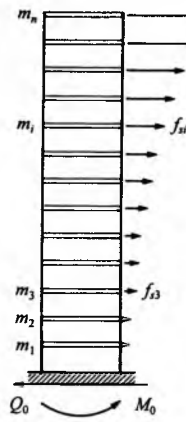


Sl. 30. Vlastiti načini vibriranja sustava s tri stupnja slobode dobiveni za konkretne vrijednosti katnih masa i horizontalnih krutosti stupova

biti već opisani spektri za sustave s jednim stupnjem slobode. To se postiže tako što se prvo dijagonalizira matrica masâ i matrica prigušenja uvođenjem transformacije:

$$[x] = [\Phi][y], \tag{92}$$

gdje je $[x]$ vektor prvobitnih (nepoznatih) koordinata, $[y]$ vektor normiranih koordinata, a $[\Phi]$ matrica transformacije kojoj su stupci proporcionalni vektorima vlastitih načina vibriranja. Svaki se stupac matrice transformacije može označiti s Φ_i, što predstavlja i-ti vlastiti način vibriranja sustava s n stupnjeva slobode.



Sl. 31. Diskretni sustav s proizvoljnim konačnim brojem stupnjeva slobode i s vrijednostima ekvivalentnih bočnih sila f

Za opterećenje sustava sa slike 31 potpuno iregularnim pomacima podloge uzrokovanima potresom, na osnovi spomenute transformacije koordinata, dobiva se modalna jednadžba za frekvenciju i:

$$\ddot{y}_i + 2\zeta_i\omega_i\dot{y}_i + \omega_i^2 y_i = -\frac{L_i}{M_i}\ddot{x}_g(t), \tag{93}$$

gdje je $i = 1, 2, \ldots, n$, L_i faktor udjela ili participacije (iznos s kojim i-ta frekvencija pridonosi seizmičkom opterećenju), a M_i generalizirana masa za frekvenciju i:

$$L_i = \sum_{k=1}^{n} m_k \Phi_{ik}, \tag{94}$$

$$M_i = \sum_{k=1}^{n} m_k \Phi_{ik}^2. \tag{95}$$

Rješenje jednadžbe (93), analogno rješenju jednadžbe (83), daje se u obliku Duhamelova integrala:

$$y_i(t) = -\frac{L_i}{M_i\nu_i}\int_0^t \ddot{v}_g(\tau)\mathrm{e}^{-\zeta_i\omega_i(t-\tau)}\sin[\nu_i(t-\tau)]\mathrm{d}\tau. \tag{96}$$

Prema uvedenoj transformaciji koordinata (92), vektor prvobitnih koordinata opisuje se izrazom

$$x(t) = -\sum_{i=1}^{n}\frac{L_i}{M_i\nu_i}\Phi_i J_i, \tag{97}$$

gdje je J_i integral iz izraza (96).

Posmične sile u razmatranoj konstrukciji, koje su uzrokovane vrijednostima deformacije konstrukcije (97), odredit će se primjenom koncepcije *ekvivalentnih bočnih sila f*. To su, dakle, sile koje primijenjene na konstrukciju uzrokuju pomake (97), a prikazane su na slici 31 za frekvenciju s. U toj je fazi analize veza između opterećenja f i deformacije konstrukcije (16) linearnoelastična. Sile f su na slici 31 prikazane po katovima i označene simbolima f_{si}, te se za s-tu frekvenciju prikazuju izrazom

$$f_s = \frac{L_s}{M_s}\omega_s S_{vs}[m]\Phi_s. \tag{98}$$

To se može pokazati i na primjeru posmičnih sila. Primjenom već objašnjenih spektara ukupna vrijednost posmične sile na razini temelja građevine s jednim stupnjem slobode iznosi

$$Q_{0,\max} = kS_d = mS_a = m\omega_n S_v = \left(\frac{S_a}{g}\right)W, \tag{99}$$

a za sustave s n stupnjeva slobode svakom i-tom načinu vibracija odgovara sljedeća maksimalna vrijednost ukupne posmične sile:

$$Q_{0i,\max} = \left(\frac{S_{ai}}{g}\right)W_i, \tag{100}$$

gdje je W_i *efektivna težina* za i-ti način vibriranja, koja se u dinamici konstrukcija određuje posebnim postupkom koji ovdje neće biti razmatran. Za bilo koji način vibriranja (i-ti način) spektralne vrijednosti u modalnoj analizi dobivaju sljedeće oznake:

$$\begin{aligned} S_{di} &= S_d(\omega_i,\zeta_i),\\ S_{vi} &= S_v(\omega_i,\zeta_i),\\ S_{ai} &= S_a(\omega_i,\zeta_i). \end{aligned} \tag{101}$$

Kvocijent S_{ai}/g u jednadžbi (99) vrlo je važan, jer pokazuje odnos horizontalnog opterećenja (nastalog djelovanjem određenog potresa, kojega su spektri mjerodavni za određenu građevinu) prema vertikalnom stalnom opterećenju za određeni način vibriranja.

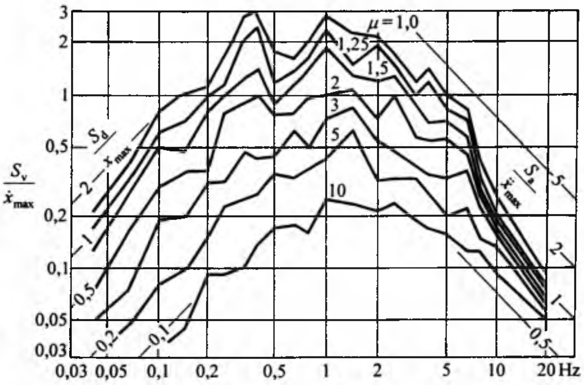
Ukupna maksimalna posmična sila za sustav s n stupnjeva slobode nije jednaka zbroju modalnih maksimalnih vrijednosti posmičnih sila (100) za svaki način vibriranja posebno. Aproksimacija ukupne maksimalne posmične sile osniva se na probabilističkim analizama, pa se u praksi najčešće upotrebljava sljedeća aproksimacija:

$$Q_{0,\max} = \left(Q_{01,\max}^2 + Q_{02,\max}^2 + \ldots + Q_{0n,\max}^2\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{102}$$

Sva navedena razmatranja odnosila su se na analizu linearnoelastičnog ponašanja građevine. Međutim, građevinske se konstrukcije u potresima većih intenziteta redovito ponašaju nelinearno, pri čemu se računa s velikim oštećenjima građevine, ali ne i s njezinim rušenjem, što znači da konstrukcija mora imati određenu *duktilnost*. Zato se u računskoj analizi konstrukcije pretpostavlja nelinearna elastoplastična veza između deformacija i bočnog opterećenja od potresa. Budući da je problem nelinearan, definiranjem određenog elastoplastičnog dijagrama diferencijalna jednadžba (82) rješava se postupno. Ako se dobiveno rješenje označi simbolom x_p, koji asocira na usvojeno elastoplastično nelinearno ponašanje sustava, može se definirati *faktor duktilnosti*, η, kao kvocijent maksimalnog pomaka konstrukcije $x_{p,\max}$ i pomaka iste konstrukcije na granici elastičnosti x_y.

Skoro svi dosadašnji potresi većeg intenziteta obradili su se i prikazali spektrima za elastoplastično ponašanje konstrukcija. Jedan je takav primjer za potres El Centro dan na slici 32. Sposobnost je duktilnog ponašanja konstrukcije u potresu poželjna, jer se tako gubi seizmička energija unijeta u konstrukciju prilikom potresa. Stupanj je takva ponašanja među ostalim određen faktorom duktilnosti, o kojem na slici 32 ovise vrijednosti seizmičkih sila za koje se računa predmetna građevina.

Vibracije tla za vrijeme potresa očituju se vrijednostima ubrzanja tla. Ubrzanja se registriraju u tlu ili na određenim mjestima na konstrukciji specijalnom opremom, koja se automatski uključuje na početku djelovanja potresa većeg intenziteta. Obradbom registriranih vrijednosti određuju se sile koje su djelovale na građevinu tijekom potresa, a njihovo je poznavanje potrebno radi proračuna nosivosti građevina (v. *Projektiranje zgrada u potresnim područjima*, TE11, str. 268). Analiza vibracija konstrukcije u potresu obvezna je i propisana državnim normama, a provodi se metodama dinamike konstrukcija. Zbog kompleksnosti građevina kao što su brane, mostovi ili visoke stambene zgrade, često je takvu analizu teško provesti analitički, te se rade modelna ispitivanja za te građevine na vibroplatformi. Ispitivani se model opterećuje odabranom komponentom potresa, pa se registrira ponašanje određenog dijela modela.



Sl. 32. Spektar elastoplastičnih sustava za kalifornijski potres El Centro iz 1940. godine (ζ=2%)

Često je potrebno provjeriti ima li izgrađena građevina one vlastite vrijednosti koje su dobivene proračunom prilikom projektiranja. Takva se ispitivanja obično propisuju za građevine kojih je funkcioniranje nužno upravo nakon katastrofalnih potresa (bolnice i sl.). Ispitivanja se provode pobuđivanjem konstrukcije na vibriranje pomoću *vibratora* koji se sastoji od dviju masa koje rotiraju u suprotnim smjerovima oko iste vertikalne osi, te se tako stvaraju harmonijske poremećajne sile, kojima se intenziteti i frekvencije mogu po potrebi mijenjati.

Često se građevine u područjima potresa velikih intenziteta grade uz primjenu metode izoliranja vibracija. Radi se o temeljenju s posebnim uređajima kojima se apsorbira seizmička energija i znatno reducira intenzitet sila koje u potresu djeluju na građevinu.

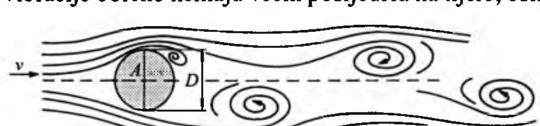
Aerodinamičke vibracije. Prilikom strujanja fluida pored nekog valjkastog tijela nastaju iza njega vrtlozi (*Kármánovi vrtlozi*). Oni imaju naizmjenično smjer kazaljke na satu i smjer obratan od toga, nastaju na sasvim pravilan način (sl. 33), a pridružena im je bočna harmonijska sila F_K (*Kármánova sila*), koja djeluje na to valjkasto tijelo i uzrokuje njegovo vibriranje. Mehanizam nastajanja vrtloga iza mirnog valjka je samopobuđujući, a tijelo vibrira u smjeru okomitom na smjer strujanja fluida. Kármánova uzbudna sila opisuje se izrazom

$$F_K = \left(C_K \frac{1}{2}\rho v^2 A\right)\sin\omega t, \tag{103}$$

gdje je ρ gustoća fluida, v brzina, A površina poprečnog presjeka valjkastog tijela, a C_K koeficijent Kármánove sile (najčešće jednak jedinici). Veza između frekvencije f, promjera valjkastog tijela D i brzine fluida v određena je izrazom

$$\frac{fD}{v} = 0{,}22. \tag{104}$$

Taj je kvocijent bez dimenzija i naziva se *Strouhalov broj*. Opisane vibracije obično nemaju većih posljedica na tijelo, osim ako



Sl. 33. Prikaz Kármánovih vrtloga

se frekvencija tako stvorene Kármánove harmonijske sile podudari s nekom od vlastitih frekvencija tijela.

Aerodinamičke se vibracije mogu lako uočiti na žicama električnog dalekovoda, koje na vjetru pri određenim vremenskim uvjetima, pogotovo kad se na njima stvori led, vibriraju velikim amplitudama, a niskim frekvencijama (tzv. galopiranje žica). Pritom žice mogu puknuti, jer s jednim ili dva poluvala vibriraju amplitudama koje u sredini između dva dalekovodna stupa mogu biti i veće od metra, čime se stvara i dodatna dinamička sila na sam dalekovodni stup. To su također samopobudne vibracije jer žica zbog nahvatanog leda mijenja svoj prvobitni kružni poprečni presjek.

Aerodinamičke vibracije i aerodinamička stabilnost poprečnih presjeka valjkastih tijela najviše su vezani uz aeronautiku, a u građevinarstvu su važni pri projektiranju izrazito visokih građevina te pri izboru oblika poprečnih presjeka mostova velikih raspona, jer su oni, uz ostale sile, izloženi i djelovanju vjetra. Izbor povoljnog poprečnog presjeka mosta obavlja se modelnim ispitivanjima u vjetrenom tunelu, što je u mnogim zemljama zakonski propisano za mostove većih raspona. Ta je obveza uvedena nakon havarije visećeg mosta Tacoma Narrows preko rijeke Puget Sound u Washingtonu. Most je pušten u promet 1. srpnja 1940. godine, a srušio se 7. studenoga iste godine jer se pri vjetru brzine 68 km/h frekvencija vrtloženja podudarila s jednom od vlastitih torzijskih frekvencija kolnika mosta. Pri nastaloj rezonanciji krajevi poprečnog presjeka mosta dobili su velike rotacijske pomake, koji su iznosili do 45° prema horizontali, a njihov je raspored po duljini mosta bio u dva sinusna poluvala. Konstrukcija novog mosta Tacoma Narrows projektirana je i izgrađena na iskustvima srušenog mosta, a sastoji se od glavnih rešetkastih nosača (na srušenom mostu nosači su bili puni), čime je spriječeno stvaranje velikih vrtloga. Osim toga, kolnička ploča novog mosta ima uzdužne proreze da bi se spriječila velika razlika tlaka između gornje i donje strane kolnika, a na donjoj je strani radi povećanja torzijske krutosti postavljen rešetkasti element.

M. Čaušević

MJERENJE I SMANJIVANJE VIBRACIJA

Mjerenje vibracija. Vibracije i problemi koje one uzrokuju datiraju od vremena kada su se počeli graditi strojevi za industrijsku proizvodnju, a osobito otkada se različiti motori upotrebljavaju za njihov pogon. U početku su pogonski inženjeri i tehničari bili u stanju dodirom ili slušanjem, na temelju svojeg iskustva, utvrditi razinu vibracija nekog stroja i pratiti pogoršava li se njegovo vibracijsko stanje. Kako su problemi uzrokovani vibracijama (utjecaj na okoliš, na čovjeka i na vijek trajanja strojeva) postajali sve većima, postupno su se razvijale metode projektiranja takvih strojeva u kojima je pojava vibracija smanjena na najmanju moguću mjeru, odnosno u kojima su vibracije izolirane od okoliša. Međutim, to je istodobno zahtijevalo da se razviju uređaji za mjerenje i analizu mehaničkih vibracija te i sama tehnologija mjerenja.

Danas se vibracije mjere praktički svagdje gdje se pojavljuju, tj. na objektima sa samouzbudom ili nekom vanjskom uzbudom. Tako se npr. mjere vibracije raznih strojeva (pogonskih motora, kompresora, crpki, proizvodnih strojeva), vibracije uređaja (električnih uređaja, elektroničkih aparata, kotlova, rashladnih uređaja, kontrolnih ploča), vozila (tračničkih, cestovnih, građevinskih), zrakoplova, brodova, mostova, zgrada, tankostijenih brana, osovinskih vodova za prijenos snage, prostorija (radnih, za boravak i odmor) i dr.

Cilj je tih mjerenja višestruk. Prije svega treba utvrditi vibracijsku sliku objekta koji se mjeri, tj. treba izmjeriti vibracijske parametre prisilnih i rezonantnih vibracija (akceleraciju, brzinu ili pomak i pripadne frekvencije). Zatim treba analizom utvrditi izvor vibracija objekta, bilo da je to uzbuda koju daje neki ugrađeni pogonski sustav u objektu ili neki vanjski sustav, kojega se uzbuda prenosi na objekt podlogom, tekućinom, zrakom i sl. Uzbuda koja uzrokuje vibracije objekta periodična je sila ili moment, odnosno vibracijski pomak podloge uz pripadnu frekvenciju. Prema tome, da bi se utvrdio uzročnik vibracija, treba u prvome redu poznavati frekvenciju uzbude.

Nadgledanje stanja stroja praćenjem vibracijskih parametara poseban je oblik mjerenja vibracija koji se počeo primjenjivati u novije doba.

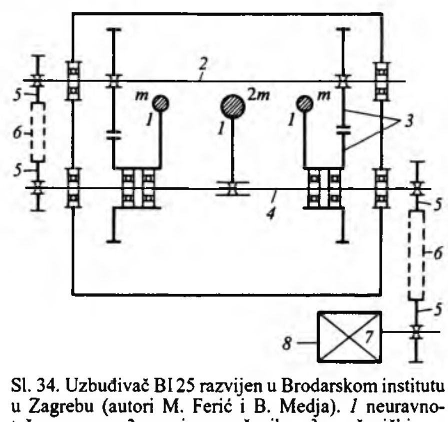
Dobro konstruiran i izveden stroj proizvodit će nisku razinu vibracija, no kako se stroj troši, temelji sliježu i dijelovi deformiraju, počinju se pojavljivati promjene u dinamičkom ponašanju stroja. Osovine postaju necentrirane, dijelovi se počinju trošiti, rotori postaju neuravnoteženi i zračnosti se povećavaju. Sve se to očituje u povećanju razine vibracija i mogućoj pojavi rezonancija, što uzrokuje velika dinamička opterećenja u ležajevima, pa konačno i lom stroja.

Početnim mjerenjem i analizom vibracija stroja u normalnom režimu rada, kada je stroj nov ili generalno servisiran, dakle još u dobrom stanju, dobije se frekvencijski spektar, koji u daljem postupku služi kao referentna oznaka tog stroja. Poslije se mjerenjima vibracija u redovitim intervalima može otkriti i pratiti nastanak i razvoj kvara. Naime, usporedbom novoga frekvencijskog spektra s referentnim može se uočiti povećanje određene frekvencijske komponente u spektru, koja upućuje na dio stroja u kojem nastaje kvar. Ekstrapolacijom vremenske promjene komponente može se predvidjeti kada će se stroj morati servisirati.

Ta metoda nadgledanja stroja praćenjem njegova vibracijskog stanja s ekonomske je strane vrlo korisna jer se može unaprijed planirati zamjena istrošenih dijelova i prekid rada.

Umjetna vibracijska uzbuda nekog objekta primjenjuje se da bi se utvrdila točnost teorijskog proračuna rezonantnih frekvencija, a i ondje gdje bi takav proračun bio složen i nesiguran kao npr. za brodske lokalne strukture. Mjerenjem vibracijskog odziva strukture na uzbudu mogu se odrediti one frekvencije pri kojima nastaje rezonancija te strukture. Umjetna uzbuda generira se uzbuđivačima (mehaničkim ili elektrodinamičkim) ili udarcima čekića.

Uobičajeni *mehanički uzbuđivač* ima dvije kolinearne osovine s neuravnoteženim masama koje rotiraju u suprotnom smjeru. Namještanjem relativnog međusobnog položaja masa može se dobiti oscilirajuća vertikalna ili horizontalna uzbudna sila. Promjenom neuravnotežene mase i brzine vrtnje dobivaju se sile različite frekvencije i amplitude. Loša je strana te izvedbe što se pri horizontalnoj uzbudi pojavljuje oscilirajući parazitski moment para sila. Kako bi se to izbjeglo konstruiraju se katkad uzbuđivači s tri kolinearne osovine s neuravnoteženim masama, ali su oni glomazne konstrukcije. U Brodarskom institutu u Zagrebu razvijen je 1972. uzbuđivač BI25 (sl. 34) kao potpuno originalno rješenje, u kojem su sve neuravnotežene mase smještene na samo jednoj osovini, čime je eliminiran parazitni moment para sila i dobivena je vrlo zbijena i lakša konstrukcija. Tri mase rotiraju oko iste geometrijske osi. Srednja je masa dva puta veća od krajnjih i okreće se u suprotnom smjeru od njih.



Sl. 34. Uzbuđivač BI25 razvijen u Brodarskom institutu u Zagrebu (autori M. Ferić i B. Medja). *1* neuravnotežene mase, *2* osovina zupčanika, *3* zupčanički par (omjer 1 : 1), *4* glavna osovina s neuravnoteženim masama, *5* zupčasta remenica, *6* zupčasti remen, *7* reduktor, *8* pogon

Elektrodinamički uzbuđivač sastoji se od trajnog magneta i zavojnice u njemu. Izmjeničnom strujom promjenljive frekvencije inducira se u zavojnici promjenljivo magnetno polje koje pobuđuje zavojnicu na osciliranje. Te se oscilacije odgovarajućim mehanizmom prenose na objekt koji treba uzbuditi. Promjenom frekvencije elektromagnetnog polja zavojnice dobivaju se oscilirajuće sile, a po potrebi i konstantne amplitude.

Udarcima posebnog čekića po objektu generiraju se uzbudne sile u širokom rasponu frekvencija, koje pobuđuju velik broj prirodnih načina vibriranja. Fourierovim razlaganjem vibracijskog odziva dobivaju se pripadne vlastite frekvencije objekta.

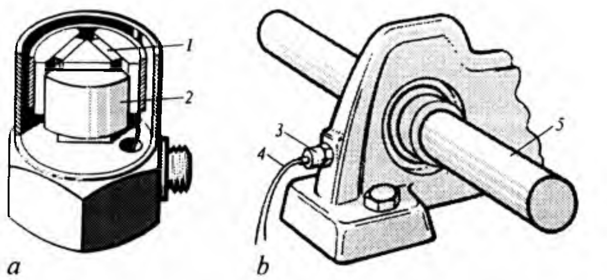
Mjerenje vibracija pojedinih objekata najčešće je propisano normama. Tako se za rotacijske strojeve (elektromotori, generatori, centrifugalne pumpe i kompresori, parne i plinske turbine, turbopuhala, reduktori, vodne turbine itd.) mjere vibracije u ravnini osovine na ležajevima u vertikalnom, horizontalnom bočnom i eventualno uzdužnom smjeru. Za klipne strojeve (benzinski i Diezelovi motori, klipni kompresori itd.) mjeri se na vrhu glave cilindra, u visini koljenčaste osovine i na temeljima, u tri glavna smjera (vertikalni, horizontalni bočni i uzdužni). Za različite uređaje, ormare s instrumentima i sl. mjere se vibracije na čvrstom dijelu, okomito na plohu, ili nekom uglu te često na mjestu pričvršćenja za podlogu u sva tri smjera. Za osovine za prijenos snage mjere se torzijske vibracije ili na čelu pogonskog stroja ili na slobodnom dijelu osovine, te aksijalne i fleksijske vibracije. Za pod, sjedala i ležaje u prostorijama gdje borave i rade ljudi, te za sjedala u kabinama vozila, građevinskih strojeva i dizalica mjere se vibracije u smjeru triju anatomskih osi čovjeka.

Mehaničke vibracije opisuju se amplitudom pomaka (kutnog zakreta), brzine ili ubrzanja, uz pripadnu frekvenciju. Za amplitude pomaka d, brzine v i ubrzanja a vrijede prilikom sinusoidnih vibracija sljedeći odnosi:

$$d = \frac{v}{2\pi f} = \frac{a}{4\pi^2 f^2}, \qquad (105)$$

gdje je f frekvencija vibracija (u Hz). Za mjerenje tih veličina danas se upotrebljavaju elektronički mjerni instrumenti. Suvremeni elektronički sustav za mjerenje vibracija sastoji se od tri osnovna dijela. To su: pretvornik, tj. uređaj za pretvaranje dinamičke mjerne veličine (brzina, ubrzanje, pomak, kut zakreta, deformacija) u električni napon, uređaj za zapis (pamćenje) mjernog signala i uređaj za analizu signala.

Najčešće se upotrebljavaju pretvornici seizmičkog tipa. *Pretvornik brzine* sastoji se od mase koja se giba unutar električne zavojnice. Kako je inducirani električni napon proporcionalan brzini gibanja mase u zavojnici, pretvornik daje izravno brzinu vibracija, a deriviranjem ili integriranjem dobije se ubrzanje, odnosno pomak. *Pretvornik ubrzanja*, *akcelerometar*, osniva se na piezoelektričnom svojstvu kremenog kristala ili specijalne keramike (v. *Kristalografija*, TE 7, str. 379) da pod dinamičkim pritiskom ili smicanjem inercijske mase stvara električni naboj proporcionalan ubrzanju (sl. 35). Piezoelektrični akcelerometri postali su u posljednje doba najčešće upotrebljavani tip mjernih pretvornika za mjerenje vibracija zbog njihovih vrsnih frekvencijskih i dinamičkih karakteristika i dobre linearnosti u cijelom mjernom području (od < 1 Hz do mnogo više od 1000 Hz). Osim toga, malih su izmjera, robusni i pouzdani, nemaju pokretnih dijelova i ne zahtijevaju poseban izvor napajanja. Vibracijski pomaci i brzine u novije se doba vrlo uspješno mjere laserskim pretvornicima beskontaktnim putem.



a *b*

Sl. 35. Pretvornik ubrzanja (*a*) i njegov položaj pri mjerenju vibracija (*b*). *1* kremeni kristal, *2* inercijska masa, *3* pretvornik, *4* priključni kabel, *5* osovina kao izvor vibracija

Uređaji za zapis mjernog signala mijenjali su se razvojem tehnologije od mehaničkih pisača na vibrografima, preko analognih pisača sa svjetlosnom zrakom na fotoosjetljivom papiru i analognih magnetofona do digitalnih magnetofona ili diskova elektroničkih računala. Ti su uređaji višekanalni, tako da mogu istodobno registrirati signale i s nekoliko stotina mjernih mjesta. Današnji uređaji za analizu signala (razlaganje na harmonijske komponente) specijalizirana su računala za brzu Fourierovu analizu.

Smanjivanje vibracija. Veličina izmjerenih amplituda i pripadne frekvencije pokazat će na temelju postojećih normi jesu li vibracije u dopuštenim granicama za izdržljivost materijala, uredno funkcioniranje stroja ili uređaja te za udobnost, radnu sposobnost i zdravlje ljudi koji ih poslužuju ili koji se nalaze pod djelovanjem vibracija. Ako se prekorače granice koje propisuju norme, amplitude vibracija nastoje se smanjiti. To se postiže promjenom parametara kojima su one određene (masa, krutost i prigušenje) i koji određuju vlastita vibracijska svojstva objekta.

Vibracije se mogu smanjiti na više načina: izbjegavanjem rezonancije vlastitih vibracija objekta i uzbude promjenom krutosti, eventualno i mase, tj. vlastite frekvencije sustava, ili promjenom frekvencije uzbude, ugradnjom specijalnih dinamičkih, hidrauličnih ili tarnih prigušivača, smanjivanjem intenziteta uzbude promjenom samog izvora uzbude, ugradnjom dinamičkih kompenzatora, koji rade na istom načelu kao uzbuđivači vibracija, ali s tom razlikom što djeluju protufazno, tj. poništavaju ili smanjuju uzbudu ili djeluju izravno na odziv konstrukcije.

Vibracijski utjecaj nekog objekta na okoliš može se smanjiti njegovom izolacijom od okoliša ugradnjom elastičnih elemenata (gumenih ili čeličnih) na mjestu učvršćenja. Isti se postupak primjenjuje ako se želi neki objekt, uređaj ili sl. izolirati od vibrirajuće okoline.

Posljedica jedne od najčešćih pojava jačih vibracija rotacijskih strojeva jest vrtnja njihovih neuravnoteženih rotora. Naime, praktički je nemoguće izraditi rotor s idealnom raspodjelom mase simetrično s obzirom na os rotacije, pa će se na osloncima svakog realnog rotora pojaviti dinamičke reakcije kao posljedica njegove statične i dinamičke neuravnoteženosti. Te dinamičke reakcije uzrokuju vibracije stroja, koje se pak mogu smanjiti na najmanju moguću mjeru dodatnim uravnoteživanjem rotora.

B. Medja

LIT.: *D. B. Steinman*, Famous Bridges of the World. Dover Publications, New York 1961. – *S. A. Tobias*, Schwingungen an Werkzeugmaschinen. Carl Hauser Verlag, München 1961. – *F. H. Todd*, Ship Hull Vibration. Eduard Arnold, London 1961. – *J. Kozesnik*, Maschinendynamik. VEB Fachbuchverlag, Leipzig 1965. – *L. Meirovitch*, Analytical Methods in Vibration. Macmillan, New York 1967. – *N. M. Newmark*, *E. Rosenblueth*, Fundamentals of Earthquake Engineering. Prentice-Hall, Engelwood Cliffs 1971. – *M. Mitschke*, Dynamik der Kraftfahrzeuge. Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg–New York 1972. – *S. Timoshenko*, *D. H. Young*, *W. Weaver*, Vibration Problems in Engineering. John Wiley and Sons, New York 1974. – *R. W. Clough*, *J. Penzien*, Dynamics of Structures. McGraw-Hill, New York 1975. – *R. Gasch, H. Pfützner*, Rotordynamik. Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg–New York 1975. – *D. J. Dowrick*, Earthquake Resistant Design, A Manual for Engineers and Architects. John Willey and Sons, New York 1977. – *F. Holzweizsig*, *H. Dresig*, Lehrbuch der Maschinendynamik. Springer-Verlag, Wien–New York 1979. – *M. Paz*, Structural Dynamics. Van Nostrand Reinhold Company, New York 1980. – *I. Senjanović*, Vibracije broda, I, II, III. Sveučilište u Zagrebu 1974/80/81. – *K. J. Bathe*, Finite Element Procedures in Engineering Analysis. Prentice-Hall, Englewood Cliffs 1982. – *G. W. Housner*, *P. C. Jennings*, Earthquake Design Criteria. Earthquake Engineering Research Institute, Berkeley 1982. – *N. M. Newmark*, *W. J. Hall*, Earthquake Spectra and Design. Earthquake Engineering Research Institute, Berkeley 1982. – VDI-Handbuch Schwingungstechnik. VDI-Verlag, Düsseldorf 1982. – *E. Krämer*, Maschinendynamik. Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg–New York–Tokyo 1984. – *K. E. Hafner*, *H. Mass*, Torsionsschwingungen in der Verbrennungskraftmaschinen. Springer-Verlag, Wien–New York 1985. – Vibration Control in Ships. Det norske Veritas, Oslo 1985. – Building and Operation of Vibration Free Propulsion Plants and Ships. Bureau Veritas, Paris 1987. – *P. Hagedorn*, *S. Otterbein*, Technische Schwingungslehre. Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg–New York–London–Paris–Tokyo 1987. – *C. M. Harris* (Ed.), Shock and Vibration Handbook, McGraw-Hill, [3]1988. – *N. F. Rieger*, Rotordynamics 2. Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg–New York–London–Paris–Tokyo–Hong Kong 1988. – Electronic Instruments. Brüel & Kjaet, Naerum 1989. – *J. S. Hubert*, *E. S. Palencia*, Vibration and Coupling of Continuous Systems. Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg–New York–London–Paris–Tokyo–Hong Kong 1989. – *H. Waller*, *R. Schmidt*, Schwingungslehre für Ingenieure. Wissenschaftsverlag, Mannheim–Wien–Zürich 1989.

I. Alfirević M. Čaušević B. Medja
I. Senjanović M. Stegić J. Uršić